Rappels de géométrie euclidienne. Les configurations

Table des matières

1 Rappels de géométrie euclidienne

1.1 Euclide

Un des premiers pensionnaires du Muséum d'Alexandrie, communauté scientifique ayant pour but de rassembler dans un même lieu tout le savoir du monde au troisième siècle avant notre ère.
Euclide, à travers un ensemble de 13 livres « *Les éléments* », fait le point sur les connaissances en géométrie plane, sur la théorie des nombres puis sur la géométrie dans l'espace.
De plus Euclide codifie la démonstration mathématique qui est toujours en usage aujourd'hui. Elle est basée sur le schéma suivant :

> *On sait que* : hypothèses de l'énoncé, définitions, postulat
> *Or* : propriétés, théorème
> *Donc* : ce que l'on veut montrer.

Exemple : Soit un triangle ABC rectangle en A. Montrer que les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires.

On sait que : ABC est rectangle en A soit $\widehat{A} = 90°$
Or la somme des angles dans un triangle vaut 180°
Donc $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$. Les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires.

1.2 Éléments du plan

Le plan Euclidien est infini dans les deux dimensions qui le compose. Il n'y a pas de repère, innovation qui viendra beaucoup plus tard au XVII[e] siècle avec Descartes.

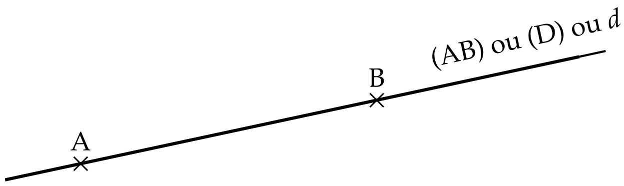
a) Le point

Élément du plan qui n'a pas de partie. Il est noté par une majuscule : A, B, C,. . .
Si l'on veut désigner un point inconnue : M, N, . . .

b) La droite

Une droite est définie par deux points. Elle est illimitée à chaque extrémité.

Notation : Si la droite est déterminée par les points A et B, on note la droite (AB). On peut noter une droite par une majuscule (D), (Δ) (noter la présence de parenthèse pour ne pas confondre la droite avec un point) ou une minuscule d, δ (les parenthèse ne sont pas nécessaires).



Rapport entre deux droites

1) Deux droites d_1 et d_2 peuvent être parallèles. Elles n'ont aucun point commun ou elles sont confondues :

$$d_1 // d_2 \quad \Leftrightarrow \quad d_1 \text{ et } d_2 \text{ n'ont aucun point commun ou } d_1 = d_2$$

2) Deux droites peuvent être sécantes si elles ne sont pas parallèles. Elles se coupent alors en un point.

   Si trois droites se coupent en un point, elles sont concourantes.

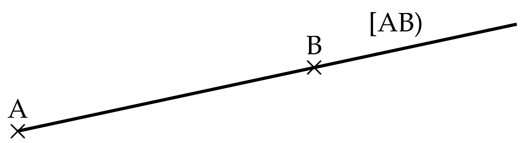
3) Deux droites peuvent être perpendiculaires si elle se coupe en angle droit. On note alors $d_1 \perp d_2$

   Si deux droites sont perpendiculaires à une troisièmes elles sont parallèles entre elles.

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \perp d_3 \\ d_2 \perp d_3 \end{array}\right\} \quad \text{alors} \quad d_1 // d_2$$

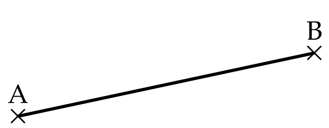
c) Demi-droite

Une demi-droite est une droite limitée à une extrémité. Si une demi-droite est limitée en A et passe par B, on la note [AB).



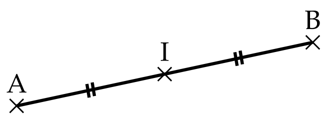
d) Le segment

Un segment est une droite limitée aux deux extrémités. Si le segment est limité en A et B, il est noté [AB].



Si le plan est doté d'une unité de mesure, on note AB la distance entre A et B.

Le milieu d'un segment, divise celui-ci en deux parties égale. Si I est le milieu du segment [AB], on note $\text{I} = m[\text{AB}]$.

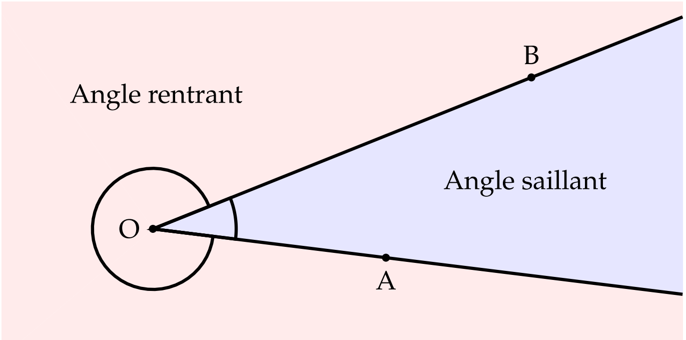


$$\text{AI} = \text{IB} = \frac{\text{AB}}{2}$$

e) L'angle

Un angle est un secteur du plan délimité par deux demi-droites. On distingue alors deux types d'angles :

- Les angles saillants (ou géométriques) notés : $\widehat{AOB}$ compris entre 0 et 180°.
- Les angles rentrants compris entre 180°et 360°



Angles saillants

On distingue parmi les angles saillants, les types suivants :

- Les angles aigus : compris entre 0°et 90°
- Les angles droits : 90°
- Les angles obtus : compris entre 90°et 180°
- Les angles plats : 180°

On dit que deux angles sont complémentaires, supplémentaires si leur somme vaut respectivement 90°et 180°.

$\alpha + \beta = 90°$	α et β complémentaires	les 2 angles dans un triangle rectangle
$\alpha + \beta = 180°$	α et β supplémentaires	les 2 angles que forment deux droites sécantes

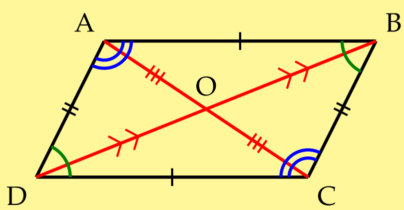
1.3 Les quadrilatères

a) Parallélogramme

Il existe 6 définitions, toutes équivalentes, du parallélogramme.

Un parallélogramme est un quadrilatère dont

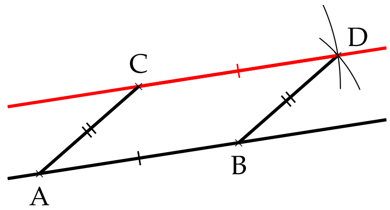
1) les côtés opposés sont deux à deux parallèles.
2) les côtés opposés sont deux à deux de même longueur.
3) deux côtés sont parallèles et de même longueur.



4) les diagonales se coupent en leur milieu. (centre de symétrie)
5) deux angles consécutifs quelconques sont supplémentaires.
6) les angles opposés sont égaux deux à deux.

Remarque : A l'aide de la définition 3) (égalités de distances), on peut tracer la parallèle à un point C extérieur à une droite (AB) donnée.

Tracer cette droite revient à tracer le point D tel que ABDC soit un parallélogramme. On reporte donc la distance AC à partir de B et la distance AB à partir de C. On obtient ainsi le point D. La droite cherchée est la droite (CD).



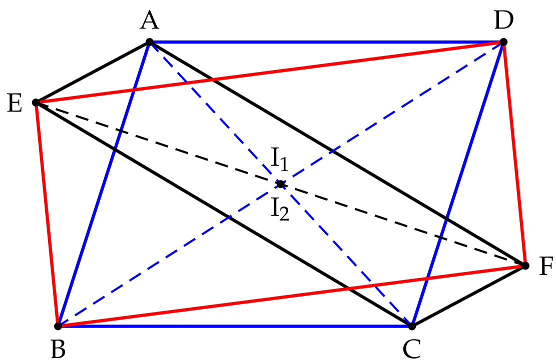
Exemple : Soit A, B, C, D, E et F six points tels que ABCD et AECF soient des parallélogrammes. Démontrer que le quadrilatère EBFD est un parallélogramme.

Faisons une figure : On trace un parallélogramme ABCD, on place le point E, puis on détermine F tel que AECF soit un parallélogramme.

Soit I_1 le centre de ABCD. Comme ABCD est un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu donc I_1 est le milieu de [AC] et [BD].

Soit I_2 le centre de AECF. Comme AECF est un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu donc I_2 est le milieu de [AC] et [EF].

Comme I_1 et I_2 sont le milieu de [AC], on en déduit que $I_1 = I_2$.



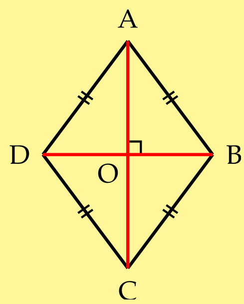
Comme $I_1 = I_2$ alors [BD] et [EF] ont le même milieu. Les diagonales de EBFD se coupent en leur milieu donc EBFD est un parallélogramme.

b) Le losange

Définition 1 : Losange. Les 4 définitions sont équivalentes.

Un losange est :

1) un **quadrilatère** dont les 4 côtés sont de même longueur.
2) un **quadrilatère** dont les diagonales se coupent en leur milieu perpendiculairement.
3) un **parallélogramme** dont deux côtés consécutifs sont de même longueur.
4) un **parallélogramme** dont les diagonales sont perpendiculaires



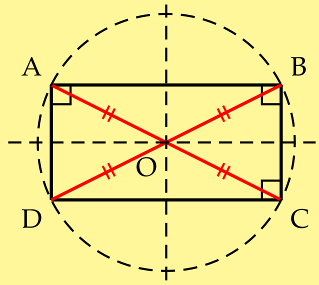
Remarque : Un losange possède deux axes de symétrie : les diagonales. Les diagonales sont les bissectrices des angles formés par 2 côtés consécutifs. Un losange permet ainsi de tracer la bissectrice d'un angle.

c) Le rectangle

Définition 2 : **Rectangle.** Les 4 définitions sont équivalentes.

Un rectangle est :

1) un **quadrilatère** qui a trois angles droits.
2) un **quadrilatère** dont les diagonales sont de même longueur et qui se coupent en leur milieu.
3) un **parallélogramme** qui a 1 angle droit.
4) un **parallélogramme** dont les diagonales sont de même longueur.



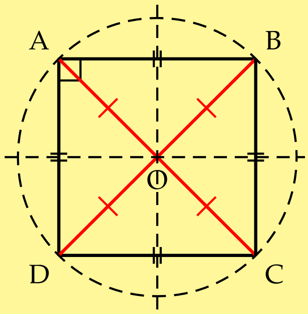
Remarque : Un rectangle possède deux axes de symétrie : les médiatrices des côtés. Comme les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu, un rectangle est **inscriptible** dans un cercle.

d) Le carré

Définition 3 : **Carré.** Les trois définitions sont toutes équivalentes.

Un carré est :

1) un losange et un rectangle.
2) un quadrilatère qui a ses 4 côtés de même longueur et 1 angle droit.
3) un quadrilatère dont les diagonales de même longueur, se coupent en leur milieu perpendiculairement.

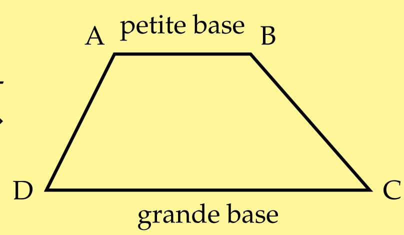


Remarque : Un carré possède quatre axes de symétrie : les deux diagonales et les médiatrices des côtés. Un carré est un **quadrilatère régulier** (côtés de même longueur inscriptible dans un cercle).

e) Le trapèze

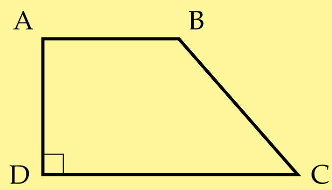
Définition 4 : **Trapèze**

Un trapèze est un quadrilatère qui a 2 côtés parallèles. Ces 2 côtés parallèles sont appelés les « bases » du trapèze.

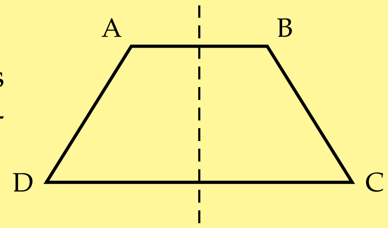


Définition 5 : Trapèzes particuliers

Un trapèze rectangle est un trapèze qui possède un augle droit.



Un trapèze isocèle est un trapèze dont les deux bases ont même médiatrice. Il possède alors un axe des symétrie.



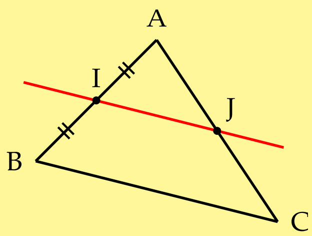
2 Droites dans un triangle

2.1 Le théorème des milieux

a) Le théorème direct

Théorème 1 : Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté coupe le troisième en son milieu.

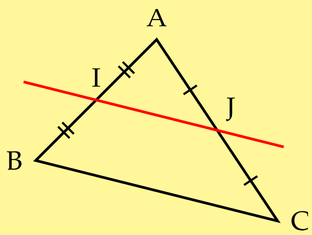
Si $\begin{cases} \text{I} = m[\text{AB}] \\ (\text{IJ}) /\!/ (\text{BC}) \end{cases}$ alors $\begin{cases} \text{J} = m[\text{AC}] \\ \text{IJ} = \dfrac{1}{2}\text{BC} \end{cases}$



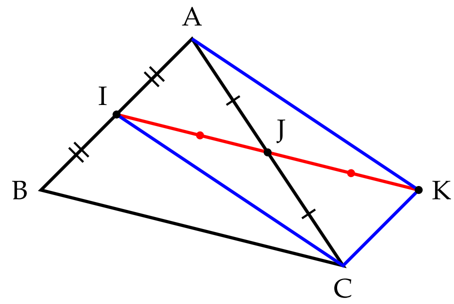
b) La réciproque du théorème des milieux

Théorème 2 : Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu de deux côtés est parallèle au troisième.

Si $\begin{cases} \text{I} = m[\text{AB}] \\ \text{J} = m[\text{AC}] \end{cases}$ alors $\begin{cases} (\text{IJ}) /\!/ (\text{BC}) \\ \text{IJ} = \dfrac{1}{2}\text{BC} \end{cases}$



Démonstration : Démontrons la réciproque du théorème des milieux. Soit un triangle ABC et I, J les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC]. Soit le point K le symétrique de I par rapport à J. On a alors la figure suivante :



- Comme K est le symétrique de I par rapport à J, J est le milieu de [IK]. Comme J est le milieu de [AC], le quadrilatère AKCI a ses diagonales qui se coupent en leur milieu donc AKCI est un parallélogramme.
- Comme AKCI est un parallélogramme, les côtés [AI] et [KC] sont parallèles de même longueur.

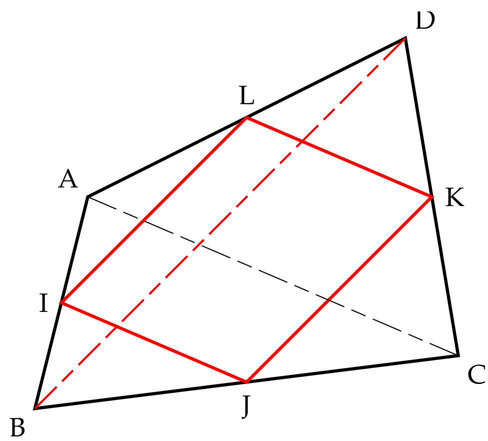
  Comme I est le milieu de [AB], on a alors les côtés [IB] et [KC] parallèles de même longueur. Le quadrilatère IKCB est alors un parallélogramme.
- Comme IKCB est un parallélogramme, les côtés [IK] et [BC] sont parallèles de même longueur. Comme J est le milieu de [IK], la droite (IJ) est parallèle à (BC) et $\text{IJ} = \dfrac{1}{2}BC$

Exemple : Quadrilatère de Varignon (1654 - 1722) :

Soit ABCD est quadrilatère quelconque. Soit I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

1) Quelle la nature du quadrilatère IJKL ?
2) Quelle condition doit vérifier ABCD pour que IJKL soit :

   a) un rectangle   b) un losange   c) un carré



1) On a la figure ci-contre.
   - Dans le triangle ABD, on sait que I est le milieu de [AB] et L le milieu de [AD], donc d'après la réciproque du théorème des milieux, on a :

     $$(\text{IL}) \mathbin{/\!/} (\text{BD}) \quad \text{et} \quad \text{IL} = \frac{1}{2}\text{BD} \quad (1)$$
   - Dans le triangle BDC, on sait que J est le milieu de [BC] et K le milieu de [CD], donc d'après la réciproque du théorème des milieux, on a :

     $$(\text{JK}) \mathbin{/\!/} (\text{BD}) \quad \text{et} \quad \text{JK} = \frac{1}{2}\text{BD} \quad (2)$$

   Des propriétés (1) et (2), on en déduit : $(\text{IL}) \mathbin{/\!/} (\text{JK}) \quad \text{et} \quad \text{IL} = \text{JK}$

   Donc le quadrilatère IJKL possède deux côtés parallèles de même longueur, donc IJKL est un parallélogramme.

2) a) Pour que IJKL soit un losange, comme IJKL est un parallélogramme, il suffit que $\text{IL} = \text{IJ}$ (3).

Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux de [AB] et [BC] donc d'après la réciproque du théorème des milieux : $(\text{IJ}) // (\text{AC})$ et $\text{IJ} = \dfrac{1}{2}\text{AC}$ (4)

Comme $\text{IL} = \dfrac{1}{2}\text{BD}$ d'après (4), on doit avoir $\text{AC} = \text{BD}$

IJKL est un losange si, et seulement si, les diagonales de ABCD sont de même longueur.

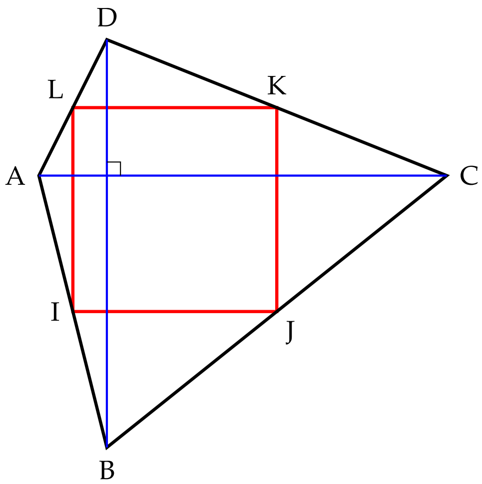
b) Pour que IJKL soit un rectangle, comme IJKL est un parallélogramme, il suffit que $(\text{IL}) \perp (\text{IJ})$.

D'après (1) et (4), on doit avoir $(\text{AC}) \perp (\text{BD})$

IJKL est un rectangle si, et seulement si, les diagonales de ABCD sont perpendiculaires.

c) Pour que IJKL soit un carré, IJKL doit être un losange et un rectangle, donc d'après les questions 2a) et 2b), le quadrilatère ABCD doit avoir des diagonales perpendiculaires de même longueur.

Dans la figure ci-contre, on a d'abord tracé les diagonales [AC] et [BD] de même longueur et perpendiculaires. On a ensuite placer les milieux I, J, K et L obtenant le carré IJKL.

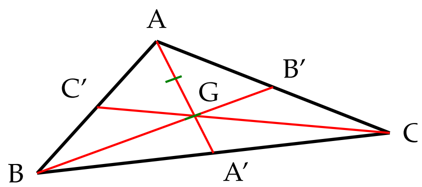


2.2 Les médianes

Définition 6 : Une médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé.
Propriété : Les trois médianes sont concourantes en un point G appelé le *centre de gravité*. Il est situé au deux tiers du sommet ou à un tiers de la base.

On peut effectuer cette figure à la règle et au compas en déterminant les milieux A′, B′ et C′ des côtés du triangle en traçant les médiatrices respectives de [BC], [AC] et [AB].

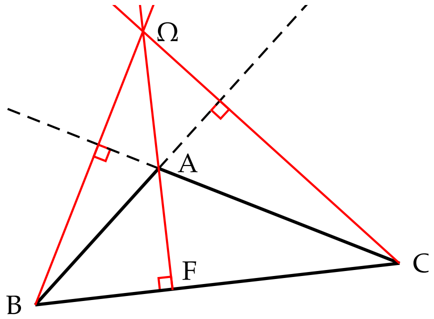
$$\text{AG} = \frac{2}{3}\text{AA}' \qquad \text{A}'\text{G} = \frac{1}{3}\text{AA}'$$



2.3 Les hauteurs

Définition 7 : Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.
Propriété : les trois hauteurs sont concourantes en un point Ω appelé orthocentre.

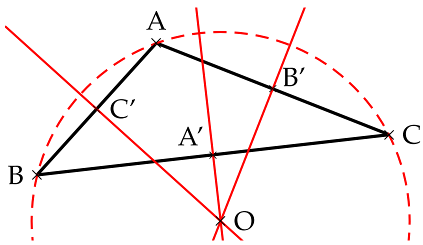
On peut effectuer cette figure à la règle et au compas. De plus, contrairement au centre de gravité, l'orthocentre peut être à l'extérieur du triangle comme sur la figure ci-contre.
Pour tracer certaines hauteurs, il est nécessaire de prolonger les côtés du triangle. Cela se produit lorsque l'angle au sommet est supérieur à 90°.



2.4 Les médiatrices

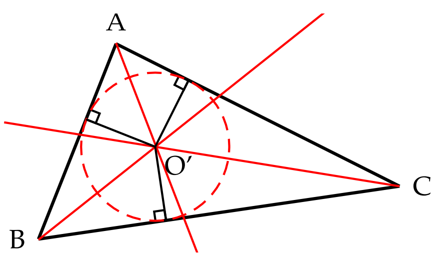
Définition 8 : La médiatrice d'un segment [AB] est la droite dont les points sont équidistants des points A et B. Elle coupe alors ce segment en son milieu perpendiculairement.
Propriété : Les trois médiatrices d'un triangle sont concourante en un point O appelé le centre du cercle circonscrit.

Remarque : Comme les trois médiatrices sont concourant en O, d'après la définition d'une médiatrice, O est alors équidistant de A, B et C. O est donc le centre du cercle circonscrit.



2.5 Les bissectrices

Définition 9 : La bissectrice d'un angle divise celui-ci en deux parties égales.
Propriété : Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point O′ appelé centre du cercle inscrit.



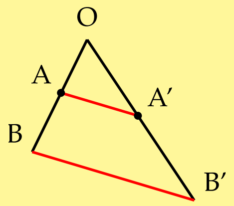
2.6 Le théorème de Thalès

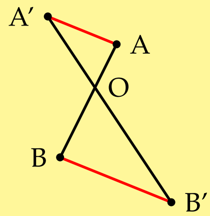
a) Théorème direct

Théorème 3 : : Soit deux droites (AB) et (A'B') sécante en O.

$$\text{Si} \quad (AA') \,//\, (BB') \quad \text{alors, on a :} \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$$

On peut avoir les deux configurations suivantes :





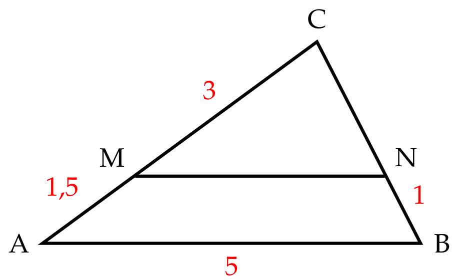
Exemple : Dans la figure ci-dessous, on a (MN) // (AB). À l'aide des indications portées sur la figure, calculer CN et MN.

Comme (MN) // (AB), nous avons une configuration de Thalès, donc

$$\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{MN}{AB}$$

Si on pose $x = CN$, de la première égalité, on a :

$$\frac{3}{4,5} = \frac{x}{x+1}$$



On fait un produit en croix,

$$\begin{aligned} 3(x+1) &= 4,5x \\ 3x + 3 &= 4,5x \\ 3x - 4,5x &= -3 \\ -1,5x &= -3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

De la seconde égalité, on a :

$$\frac{3}{4,5} = \frac{MN}{5}$$

On fait un produit en croix,

$$MN = \frac{3 \times 5}{4,5} = \frac{15}{4,5} = \frac{10}{3}$$

Conclusion : $CN = 2$ et $MN = \dfrac{10}{3}$.

b) Réciproque du théorème de Thalès

Théorème 4 : Soit O, A, B d'une part et O, A', B' d'autre part alignés dans cet ordre.

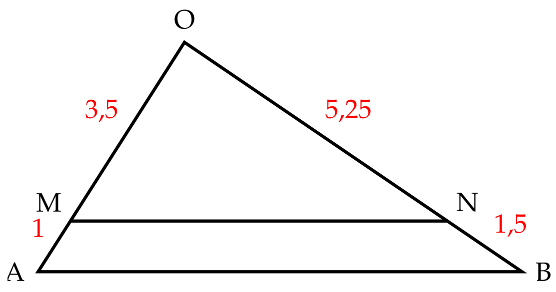
$$\text{Si} \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \quad \text{alors, on a :} \quad (AA') \,//\, (BB')$$

Exemple : On donne la figure ci-après, montrer que (AB) et (MN) sont parallèles.

Calculons les deux rapports :

$$\frac{OM}{OA} = \frac{3,5}{4,5} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{ON}{OB} = \frac{5,25}{6,75} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$



On a donc : $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB}$

donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (AB) sont parallèles.

3 Le triangle rectangle

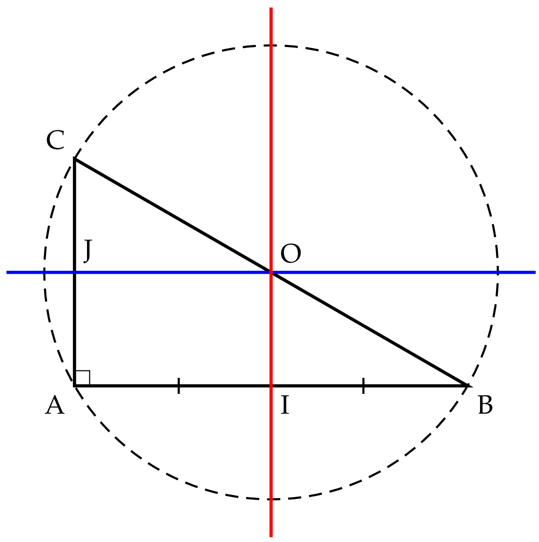
3.1 Centre du cercle circonscrit

Théorème 5 : Le centre du cercle circonscrit dans un triangle rectangle se trouve au milieu de l'hypoténuse.
Réciproquement, le triangle ABC inscrit dans un cercle de diamètre [BC] est rectangle en A

Démonstration :

1) Théorème direct.

Soit un triangle ABC rectangle en A. Soit I le milieu de [AB] et O l'intersection de la droite passant par I et parallèle à (AC) avec le segment [BC]. J est l'intersection de la droite passant par O et parallèle à (AB) avec le segment [AC]. On a alors la figure ci-contre.



Comme I est le milieu de [AB] et (IO) // (AC), d'après le théorème des milieux, on a : O milieu de [BC]

Comme (AB)⊥(AC) et (IO) // (AC) alors on a : (IO)⊥(AB).

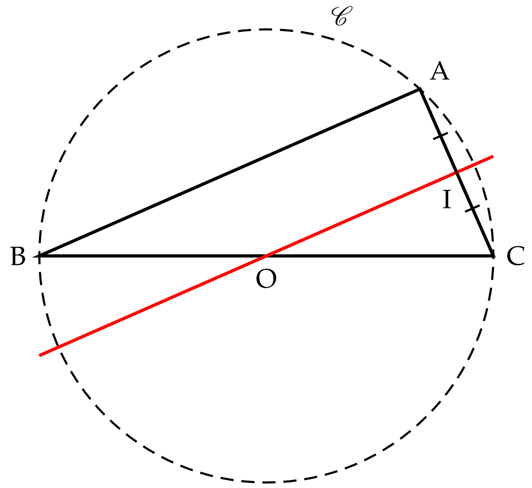
De ces deux propriétés, on en déduit que (IO) est la médiatrice de [AB].

Comme O est le milieu de [BC] et (OJ) // (AB), d'après le théorème des milieux, on a : J milieu de [AC].
Comme (AB)⊥(AC) et (JO) // (AB) alors on a : (JO)⊥(AC).
De ces deux propriétés, on en déduit que (JO) est la médiatrice de [AC].

O est donc l'intersection des médiatrices, donc le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit.

2) Réciproque.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O. Le triangle ABC est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ et [BC] est un diamètre. On appelle I le milieu de [AC]. On a alors la figure ci-contre.



Comme O est le centre du cercle circonscrit et I milieu de [AC], alors la droite (OI) est la médiatrice de [AC].

Comme O et I sont les milieux respectifs de [BC] et [AC], d'après le théorème des milieux, la droite (OI) est parallèle à (AB).

(OI) est la médiatrice de [AC], donc (AC)⊥(OI) et (OI) // (AB), on en déduit que (AC)⊥(AB). Le triangle ABC est rectangle en A.

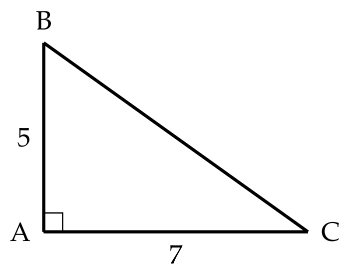
3.2 Le théorème de Pythagore

a) Le théorème direct

Théorème 6 : Dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Si ABC est rectangle en A, on a donc :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Exemple : ABC est un triangle rectangle en A, avec AB = 5 et AC = 7



D'après le théorème de Pythagore :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$

$BC = \sqrt{74} \simeq 8,6$

b) Sa réciproque

Théorème 7 : Si dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle. Si le triangle ABC est tel que :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Alors le triangle ABC est rectangle en A

Remarque : Ce théorème d'une grande efficacité met en évidence la propriétés du triplet pythagoricien 3, 4, 5. En effet : $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$
Un triangle de dimension 3, 4, 5 est donc rectangle.

3.3 Trigonométrie dans le triangle rectangle

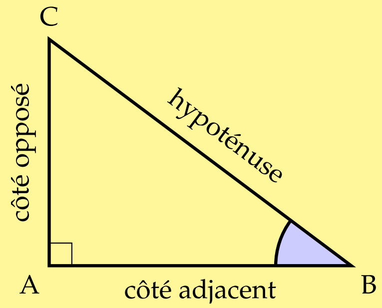
a) Définition

Définition 10 : Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit les rapports suivants (qui ne dépendent que de la mesure des angles) :

$$\sin \widehat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \widehat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB}$$



b) Propriétés

Dans un triangle ABC rectangle en A, on a :

- Les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires
- Comme le côté opposé à $\widehat{B}$ correspond au côté adjacent à $\widehat{C}$ et inversement, on a alors :
$$\sin \widehat{B} = \cos \widehat{C} \quad \text{et} \quad \cos \widehat{B} = \sin \widehat{C}$$
- On a les relations suivantes :

$$\tan \widehat{B} = \frac{\sin \widehat{B}}{\cos \widehat{B}} \quad , \quad \sin^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{B} = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2 \widehat{B} = \frac{1}{\cos^2 \widehat{B}}$$

c) Tableau des lignes trigonométriques remarquables

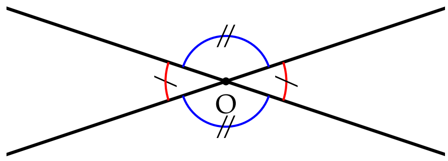
Angle α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

4 Les angles

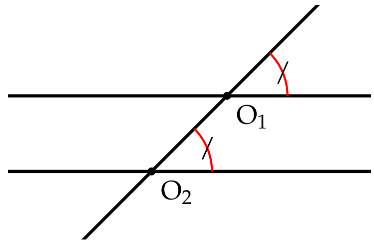
4.1 Égalité entre deux angles

On distingue 4 configurations où deux angles sont égaux

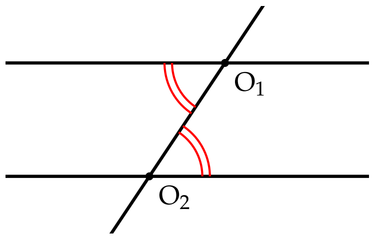
Opposés par le sommet



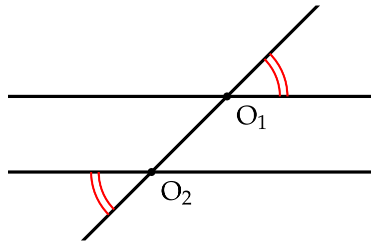
Correspondants



Alternes-internes



Alternes-externes



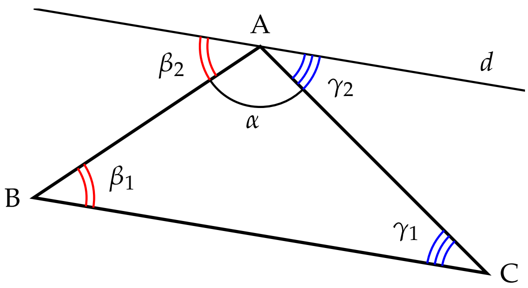
4.2 Application

Démontrer que la somme des angles d'un triangle est égal à 180°.

Faisons une figure, sur laquelle on trace la droite d parallèle à (BC).

On a alors les égalités suivantes :

$$\beta_1 = \beta_2 \quad \text{alternes-internes}$$
$$\gamma_1 = \gamma_2 \quad \text{alternes-internes}$$
$$\beta_2 + \alpha + \gamma_2 = 180$$



La somme des angles dans un triangle vaut donc 180°

4.3 Angles dans un cercle

Théorème 8 : **Angles inscrits, angle au centre, tangente**

- Dans un cercle, l'angle au centre vaut deux fois l'angle inscrit.
$$\widehat{AOB} = 2\widehat{ADB}$$
- Dans un cercle, deux angles qui interceptent le même arc sont égaux.
$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$$
- Dans un cercle, la tangente en un point est perpendiculaire au rayon.
$$(OA) \perp (T)$$