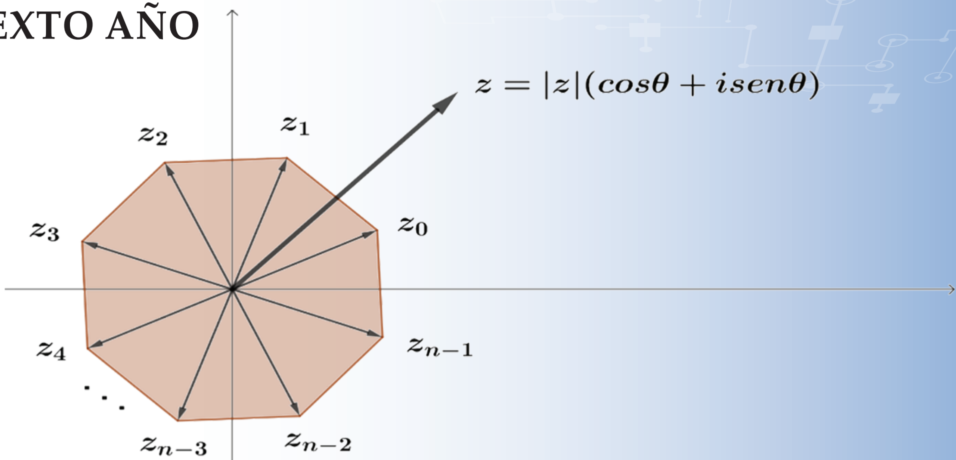
Universidad Nacional Autónoma de México
Escuela Nacional Preparatoria
SECRETARÍA ACADÉMICA

Temas Selectos de Matemáticas

SEXTO AÑO



$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos(\frac{\theta + 2\pi k}{n}) + isen(\frac{\theta + 2\pi k}{n})\right)$$

donde $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$

Colegio de Matemáticas
Clave: 1710
Plan: 96
Actualización curricular 2018

Carmen Rocío Vite González
Gabriel Gutiérrez García
Leopoldo Pantaleón Martínez
Martha Patricia Rodríguez Rosas

COLECCIÓN
Guías ~ Cuadernos
de trabajo académico

GUÍA DE ESTUDIO DE TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS

BACHILLERATO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Dirección General de la Escuela Nacional Preparatoria
Colegio de Matemáticas
Dirección General de Publicaciones y Fomento Editorial

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

COLEGIO DE MATEMATICAS

ÁREA I Y II CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Sexto año Clave 1710 Plan 1996

TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS

Guía cuaderno de trabajo académico

Programa Actualizado

Aprobado por H. Consejo Técnico el 13 de abril 2018

Bachillerato

Coordinación y revisión

Martha Patricia Rodríguez Rosas

Autores

Carmen Rocío Vite González
Gabriel Gutiérrez García
Leopoldo Pantaleón Martínez

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
2019

Escuela Nacional Preparatoria
Dirección Genera: Biól. María Dolores Valle Martínez
Secretaria Académica: Dra. Virginia Hernández Ricardez
Departamento de Producción Editorial: Lic. María Elena Jurado Alonso

Diseño de Portada: DGS Edgar Franco Rodríguez
Diseño editorial: Martha Patricia Rodríguez Rosas
Corrección de estilo: Martha Patricia Rodríguez Rosas
Cuidado de edición: Jonathan Iván Jiménez Castellanos

Primera edición: mayo, 2019
Derechos reservados por
Universidad Nacional Autónoma de México
Escuela Nacional Preparatoria
Dirección General
Adolfo Prieto 722, Col. Del Valle.
C.P. 03100, Ciudad de México
Impreso en México.

Presentación

La Escuela Nacional Preparatoria, institución educativa con más de 150 años de experiencia formando jóvenes en el nivel medio superior, culmina en este ciclo escolar 2018-2019, la colección de **Guías de Estudio** correspondientes a los programas actualizados de nuestro Plan de Estudios vigente.

Después de varios años de trabajo, reflexión y discusión, se lograron dar dos grandes pasos: la actualización e implementación de los programas de estudios de bachillerato y la publicación de la nueva colección de **Guías de Estudio**.

Ciertamente, nuestra Escuela Nacional Preparatoria es una institución que no se detiene, que avanza con paso firme y constante hacia su excelencia académica, así como preocupada y ocupada por la formación integral, crítica y con valores de nuestros estudiantes, lo que siempre ha caracterizado a nuestra Universidad Nacional.

Aún nos falta más por hacer, por mejorarnos cada día, para que tanto nuestros jóvenes estudiantes como nuestros profesores seamos capaces de responder a esta sociedad en constante cambio y a la Universidad Nacional Autónoma de México, la Universidad de la Nación.

“POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU”

BIÓL. MARÍA DOLORES VALLE MARTÍNEZ

DIRECTORA GENERAL

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

INTRODUCCIÓN

La guía de Estudios del Programa de Temas Selectos de Matemáticas tiene como objetivo brindar los contenidos básicos necesarios para presentar un examen extraordinario acorde a los propósitos y enfoque principal del programa de esta asignatura.

Los alumnos que deciden estudiar matemáticas o alguna ingeniería, deben contar con los conocimientos propios de la disciplina y además fortalecer habilidades que la matemática favorece como son el razonamiento lógico, crítico, deductivo, de análisis, síntesis, además de crear y manipular abstracciones.

El programa de Temas Selectos de Matemáticas permite que el alumno reconozca la importancia de validar una afirmación sustentada en los contenidos de la disciplina y el razonamiento lógico, con base a esto, las situaciones que comprenden la presente guía de estudio son de carácter puramente disciplinar lo que permite facilitar el desarrollo de las habilidades matemáticas indispensables en estudios profesionales.

En la Unidad 1 Conjuntos se proponen situaciones contextualizadas que permiten mostrar las bondades del lenguaje matemático y el uso de diagramas para desarrollar habilidades de visualización al resolver problemas.

La Unidad 2 Lógica, permite argumentar matemáticamente y desarrollar un pensamiento racional y abstracto a través de situaciones comunes que retan al estudiante a demostrar o refutar formalmente una proposición, apoyados en los axiomas lógicos.

Las situaciones propuestas en la Unidad 3 Métodos de demostración en matemáticas se presentan contextualizadas en ambientes propios de la disciplina en las que el alumno desarrollará sus habilidades argumentativas y de pensamiento abstracto, crítico y lógico al aplicar los métodos de demostración directa, indirecta o de inducción matemática.

En la Unidad 4 Análisis combinatorio y teorema del binomio de Newton, las situaciones pretenden desarrollar en el estudiante la creatividad, el razonamiento, la deducción y el análisis crítico, al proponer la solución de problemas contextualizados en el cálculo combinatorio con el fin de adoptar una postura crítica para la toma de decisiones.

Las situaciones que se abordan en la Unidad 5 Números complejos, muestran la relación entre las representaciones algebraicas y geométricas que existen entre los números complejos.

En la Unidad 6 Ecuaciones e Inecuaciones polinomiales en una variable se presentan situaciones que permiten mostrar la utilidad que brindan los teoremas a través al resolver un problema.

La Guía de estudios de Temas Selectos de Matemáticas presenta en cada unidad, además de situaciones para introducir los contenidos, situaciones de autoevaluación, referencias bibliográficas y al final un modelo de examen extraordinario.

ÍNDICE

Unida 5 Números complejos

Unida 6 Ecuaciones e inecuaciones polinomiales en una variable

Situaciones de un modelo de extraordinario

UNIDAD 1 CONJUNTOS

Objetivo específico

El alumno:

- Desarrollará habilidades de expresión, de razonamiento lógico y de pensamiento abstracto, a través del estudio de los conjuntos, las cuales le permitirán plantear problemas y encontrar sus soluciones, así como comunicar ideas de manera verbal y escrita con el lenguaje de las matemáticas.

Situación 1. Banquete de cumpleaños.

Para festejar el cumpleaños de Juanita sus padres ofrecen un banquete a sus familiares y amigos. Asisten 53 personas en total. A 23 invitados les gusta el atún, mientras que a 21 les gusta el calamar y 34 prefieren el bacalao. A 9 invitados les gusta el atún y el bacalao, a 10 les gusta el bacalao y el calamar, a 8 les gusta el atún y el calamar, por último, no hay ningún invitado al que le guste estos tres platillos.

1.1 ¿A cuántos invitados al banquete les gusta atún o bacalao?

A) 30
B) 48
C) 14
D) 25

Si un conjunto A tiene n elementos se dice que tiene **cardinal** n, y se escribe $|A| = n$ ó $\#(A) = n$.

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}$ y su **intersección** se define por $A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$.

El **cardinal de la unión de dos conjuntos** finitos A y B es $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Solución:

Sean A el conjunto de asistentes a la fiesta de Juanita a los que les gusta el atún, B el conjunto de asistentes a la fiesta a los que les gusta el bacalao y C el conjunto de invitados a los que les gusta el calamar. Por los datos se cumple $|A|=23$, $|B|=34$ y $|A\cap B|=9$, por lo tanto $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=23+34-9=48$.

Respuesta correcta: B)

1.2 ¿Cuántos invitados prefieren sólo el atún?

A) 6
B) 15
C) 17
D) 24

Propiedad asociativa para la intersección y para la unión:
Si A, B y C son tres conjuntos, entonces
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ y $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

Propiedad distributiva: Si A, B y C son tres conjuntos, entonces $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

La diferencia de dos conjuntos B y A es el conjunto
$B-A=\{x\in B : x\notin A\}$.

El **cardinal de la diferencia** $B-A$ de dos conjuntos finitos B y A es
$|B-A|=|B|-|A\cap B|$.

Solución:

El conjunto de los invitados a los que sólo les gusta el atún es

$A-(B\cup C)$ y su cardinal lo podemos calcular como sigue

$$|A-(B\cup C)|=|A|-|A\cap(B\cup C)|=|A|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)|$$

y luego de usar la fórmula para el cardinal de una unión finita, se obtiene

$|(A\cap B)\cup(A\cap C)|=|(A\cap B)|+|(A\cap C)|-|(A\cap B)\cap(A\cap C)|$, y al multiplicar esta igualdad por -1:

$-\left|(A\cap B)\cup(A\cap C)\right|=-\left|(A\cap B)\right|-\left|(A\cap C)\right|+\left|(A\cap B)\cap(A\cap C)\right|$, por lo tanto

$\left|A-(B\cup C)\right|=|A|-\left|(A\cap B)\right|-\left|(A\cap C)\right|+\left|(A\cap B)\cap(A\cap C)\right|$, y como

$(A\cap B)\cap(A\cap C)=A\cap B\cap A\cap C=A\cap A\cap B\cap C=A\cap B\cap C$, se concluye que

el número de invitados a los que sólo les gusta el atún es

$\left|A-(B\cup C)\right|=|A|-\left|(A\cap B)\right|-\left|(A\cap C)\right|+\left|A\cap B\cap C\right|=23-9-8+0=6$, porque por los datos iniciales se cumple $|A|=23$, $|A\cap B|=9$, $|A\cap C|=8$, y $|A\cap B\cap C|=0$ pues no hay ningún invitado al que le guste los tres platillos atún, bacalao y calamar.

Respuesta correcta: A)

1.3 ¿Cuántos invitados prefieren sólo uno de estos platillos?

A) 3
B) 6
C) 15
D) 24

Solución:

Los invitados que prefieren sólo el atún forman el conjunto $A-(B\cup C)$, los que prefieren únicamente bacalao constituyen el conjunto $B-(A\cup C)$, y los que exclusivamente prefieren el calamar conforman el conjunto $C-(A\cup B)$. En la solución del reactivo anterior se obtuvo que el número de los invitados que prefieren sólo atún es:

$$\left|A-(B\cup C)\right|=|A|-\left|(A\cap B)\right|-\left|(A\cap C)\right|+\left|A\cap B\cap C\right|=23-9-8+0=6,$$

de manera análoga se justifica que el número de los invitados que prefieren sólo bacalao es:

$$\left|B-(A\cup C)\right|=|B|-\left|(B\cap A)\right|-\left|(B\cap C)\right|+\left|A\cap B\cap C\right|=34-9-10+0=15$$

y el número de los invitados que prefieren únicamente calamar es:

$$\left|C-(A\cup B)\right|=|C|-\left|(C\cap A)\right|-\left|(C\cap B)\right|+|A\cap B\cap C|=21-10-8+0=3,$$

Al sumar el número de invitados que prefieren sólo atún más los invitados que prefieren sólo bacalao más los que sólo prefieren el calamar obtenemos la respuesta $6+15+3=24$.

Respuesta correcta: D)

1.4 ¿A cuántos de los invitados no les gusta ninguno de estos tres platillos?

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

El **cardinal de la unión de tres conjuntos** finitos A, B y C es $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$.

Sean A y B dos conjuntos. Si cada elemento de A es un elemento de B, se dice que A es un **subconjunto** de B. También se dice que A está contenido en B o que B contiene a A y se escribe: $A\subseteq B$ ó $A\subset B$.

Si A es un subconjunto de un conjunto U, entonces el **complemento** de A en U es $A^c=U-A=\{x\in U : x\notin A\}$.

Si A es un subconjunto de un conjunto finito U, entonces el complemento de A en U tiene cardinal $|A^c|=|U-A|=|U|-|A|$.

Solución:

De acuerdo a los datos, se tiene, $|A|=23$, $|B|=34$, $|C|=21$, $|A\cap B|=9$, $|B\cap C|=10$, $|B\cap C|=8$ y $|A\cap B\cap C|=0$, por lo tanto $|A\cup B\cup C|=23+34+21-9-10-8=51$, entonces el número que se busca es $\left|(A\cup B\cup C)^c\right|=|U|-|A\cup B\cup C|=53-51=2$.

La situación anterior se puede resumir en el diagrama de Venn de la Figura 1.1

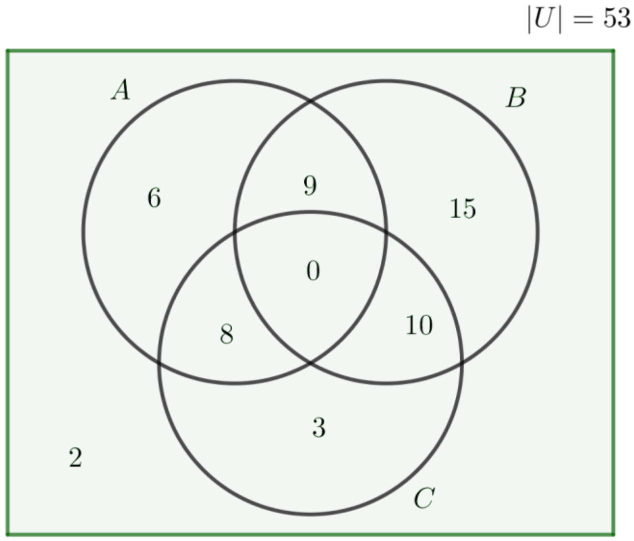


Figura 1.1

Otra manera, tal vez más eficiente de resolver la situación anterior es construir primero el diagrama de la Figura 1.1 para luego contestar los reactivos, para esto, se usa el dato del cardinal de la intersección $A \cap B \cap C$, luego se usan los cardinales de las tres intersecciones $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, y por último mediante diferencias, se calcula el cardinal de las regiones donde no hay intersecciones.

Situación 2. Operaciones con intervalos.

Considera los siguientes subconjuntos de números reales $\left[-4, \frac{15}{2}\right], [-1, \infty)$.

2.1 Calcula $\left[-4, \frac{15}{2}\right] \cup [-1, \infty)$.

A) $[-4, \infty)$

B) $(-\infty, -4)$

C) $(-\infty, -4]$

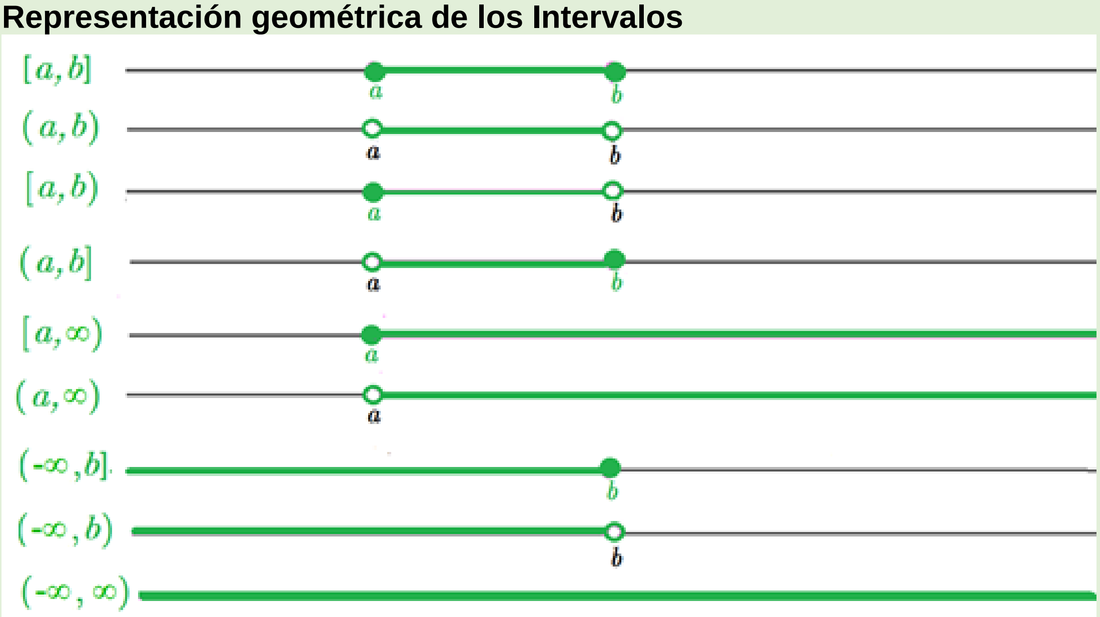
D) $(-4, \infty)$

INTERVALOS

Los intervalos son subconjuntos especiales del conjunto de los números reales, que tienen una representación geométrica simple: A cada intervalo le corresponde un segmento o un rayo de la recta real y viceversa: a cada segmento y a cada rayo de la recta real le corresponde un intervalo. A continuación, se definen y más abajo viene su representación geométrica.

Notación y definición	Nomenclatura.
$[a,b]:=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$	**"Intervalo cerrado** a,b**"**
$(a,b):=\{x\in\mathbb{R} \mid a< x< b\}$	**"Intervalo abierto** a,b**"**
$[a,b):=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x< b\}$	**"Intervalo semicerrado por la izquierda** a,b**"** **ó** **"Intervalo semiabierto por la derecha** a,b**"**
$(a,b]:=\{x\in\mathbb{R} \mid a< x\le b\}$	**"Intervalo semicerrado por la derecha** a,b**"** **ó** **"Intervalo semiabierto por la izquierda** a,b**"**
$[a,\infty):=\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge a\}$	**"Intervalo cerrado** a **, infinito"**
$(a,\infty):=\{x\in\mathbb{R} \mid x> a\}$	**"Intervalo abierto** a **, infinito"**
$(-\infty,b]:=\{x\in\mathbb{R} \mid x\le b\}$	**"Intervalo cerrado menos infinito,** b**"**
$(-\infty,b):=\{x\in\mathbb{R} \mid x< b\}$	**"Intervalo abierto menos infinito,** b**"**
$(-\infty,\infty):=\mathbb{R}$	**"Intervalo menos infinito, infinito"**

Representación geométrica de los Intervalos



Solución:

Se aplica directamente la definición de la unión $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}$ de dos conjuntos A y B para obtener

$$\left[-4, \frac{15}{2}\right] \cup [-1, \infty) = \left\{x : x \in \left[-4, \frac{15}{2}\right] \text{ ó } x \in [-1, \infty)\right\} =$$
$$\left\{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq \frac{15}{2} \text{ ó } -1 \leq x\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -4\} = [-4, \infty).$$

Respuesta correcta: A)

2.2 Calcula $\left[-4, \frac{15}{2}\right]^c - [-1, \infty)$, donde el complemento se toma en $U = \mathbb{R}$.

A) $(-\infty, -4]$
B) $(-\infty, -4)$
C) $(-\infty, 1]$
D) $(-\infty, -1)$

Propiedad: Si $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$ **,** entonces $B - A = B \cap A^c$.

Leyes de De Morgan: Si $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$, se cumplen las siguientes igualdades $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Solución:

Con $U = \mathbb{R}$, aplicamos las propiedades enunciadas en el recuadro y una de las leyes de De Morgan:

$$\left[-4, \frac{15}{2}\right]^c - [-1, \infty) = \left[-4, \frac{15}{2}\right]^c \cap [-1, \infty)^c = \left(\left[-4, \frac{15}{2}\right] \cup [-1, \infty)\right)^c \text{, pero}$$

$$\left[-4, \frac{15}{2}\right] \cup [-1, \infty) = \left\{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq \frac{15}{2} \text{ ó } -1 \leq x\right\} = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x\} = [-4, \infty) \text{, así}$$

$\left(\left[-4,\dfrac{15}{2}\right]\cup[-1,\infty)\right)^c=[-4,\infty)^c$ y por tanto

$\left[-4,\dfrac{15}{2}\right]^c\cap[-1,\infty)^c=[-4,\infty)^c=\{x\in\mathbb{R}:x<-4\}=(-\infty,-4)$.

Respuesta correcta: B)

2.3 Calcula $\left[-4,\dfrac{15}{2}\right]-[-1,\infty)^c$, donde el complemento se toma en $U=\mathbb{R}$.

A) $\left(-1,\dfrac{15}{2}\right)$

B) $\left[-1,\dfrac{15}{2}\right)$

C) $\left[-1,\dfrac{15}{2}\right]$

D) $\left(-1,\dfrac{15}{2}\right]$

Propiedad: Si $A\subseteq U$, $\left(A^c\right)^c=A$.

Solución:

Con $U=\mathbb{R}$, aplicamos una de las leyes de De Morgan enunciadas en el recuadro del reactivo 2.2, la propiedad $B-A=B\cap A^c$ y la propiedad el recuadro anterior:

$\left[-4,\dfrac{15}{2}\right]-[-1,\infty)^c=\left[-4,\dfrac{15}{2}\right]\cap\left([-1,\infty)^c\right)^c=\left[-4,\dfrac{15}{2}\right]\cap[-1,\infty)$, y

$\left[-4,\dfrac{15}{2}\right]\cap[-1,\infty)=\left\{x\in\mathbb{R}:-4\leq x\leq\dfrac{15}{2}\right\}\cap\{x\in\mathbb{R}:-1\leq x\}=$
$\left\{x\in\mathbb{R}:\ -1\leq x\leq\dfrac{15}{2}\right\}=\left[-1,\dfrac{15}{2}\right]$.

Respuesta correcta: C)

2.4 Calcula $\left[-4,\dfrac{15}{2}\right]^c \cup \left[-1,\infty\right)^c$, donde los complementos se toman en $U=\mathbb{R}$.

A) $\left(-\infty,-1\right]\cup\left[\dfrac{15}{2},\infty\right)$

B) $\left(-\infty,-1\right)\cup\left[\dfrac{15}{2},\infty\right)$

C) $\left(-\infty,-1\right]\cup\left(\dfrac{15}{2},\infty\right)$

D) $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(\dfrac{15}{2},\infty\right)$

Solución:

En $U=\mathbb{R}$, aplicamos una de las leyes de De Morgan enunciada en el recuadro del reactivo 2.2 para obtener

$\left[-4,\dfrac{15}{2}\right]^c \cup \left[-1,\infty\right)^c = \left(\left[-4,\dfrac{15}{2}\right]\cap\left[-1,\infty\right)\right)^c$, ahora se calcula este conjunto, primero con la definición de intersección de conjuntos

$$\left[-4,\frac{15}{2}\right]\cap\left[-1,\infty\right)=\left\{x\in\mathbb{R}:-4\le x\le\frac{15}{2}\right\}\cap\left\{x\in\mathbb{R}:-1\le x\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:-1\le x\le\frac{15}{2}\right\},$$

y luego se toma el complemento

$$\left(\left[-4,\frac{15}{2}\right]\cap\left[-1,\infty\right)\right)^c=\left\{x\in\mathbb{R}:-1\le x\le\frac{15}{2}\right\}^c=\left\{x\in\mathbb{R}:x<-1 \text{ ó, } x>\frac{15}{2}\right\}=\left(-\infty,-1\right)\cup\left(\frac{15}{2},\infty\right)$$

por lo tanto

$$\left[-4,\frac{15}{2}\right]^c\cup\left[-1,\infty\right)^c=\left(-\infty,-1\right)\cup\left(\frac{15}{2},\infty\right).$$

Respuesta correcta D)

Situación 3. Gustos musicales.

Al preguntar a 1000 estudiantes sobre sus preferencias musicales, resultó que a los que le gusta el rock y la música clásica son el triple de los que les gusta sólo el rock, y el doble de los que les gusta únicamente la música clásica; y cuatro veces el número de los encuestados a los que no les gustan estos dos tipos de música.

3.1 ¿Cuántos de estos 1000 estudiantes prefieren sólo la música clásica?

A) 720
B) 160
C) 240
D) 120

Dos conjuntos son **ajenos** si no tienen elementos en común, en otras palabras, si su intersección es el conjunto vacío $\varnothing$.

Si un conjunto A tiene n elementos se dice que tiene **cardinal** n, y se escribe $|A| = n$ ó $\#(n) = n$.

El **cardinal de la unión de dos conjuntos** finitos ajenos A y B es $|A \cup B| = |A| + |B|$.

La **diferencia** de dos conjuntos B y A es $B - A = \{x \in B : x \notin A\}$.

El **cardinal de una diferencia** de conjuntos:
Si B es un conjunto finito y $A \subseteq B$, entonces $|B - A| = |B| - |A|$.
Si A y B son dos conjuntos finitos cualesquiera, entonces $|B - A| = |B| - |A \cap B|$.

Solución:

Sea U el universo del discurso que consta de los mil alumnos encuestados y sean A el subconjunto de los alumnos encuestados a los que les gusta el rock y B el subconjunto de los alumnos encuestados a los que les gusta la música clásica, luego si denotamos con $x = |A \cap B|$ al número de estudiantes a los que les gustan ambos tipos de música entonces, de acuerdo a las condiciones del problema a $\frac{x}{3}$ les agrada sólo el rock, a $\frac{x}{2}$ les agrada sólo la música clásica y a $\frac{x}{4}$ no les gusta ni el Rock ni la música clásica.

Como son ajenos los conjuntos de alumnos a los que sólo les gusta el rock, de los que sólo prefieren la música clásica y de alumnos que no les gusta ni rock ni música clásica y su unión con el conjunto de alumnos a los que les agradan ambos tipos de música es el universo del discurso (es decir el total de alumnos interrogados), la suma de estas cantidades debe ser 1000 (ver el diagrama de Venn correspondiente en la Figura 1.2), por lo tanto $x=|A\cap B|$ satisface la ecuación

$$\frac{x}{3}+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=1000$$

que equivale a las siguientes

$$\frac{4x}{12}+\frac{12x}{12}+\frac{6x}{12}+\frac{3x}{12}=1000,\ \text{ó bien }\ \frac{25x}{12}=1000$$

de donde se obtiene el valor $x=480$, por lo tanto, la solución al reactivo es $\frac{x}{2}=\frac{480}{2}=240$.

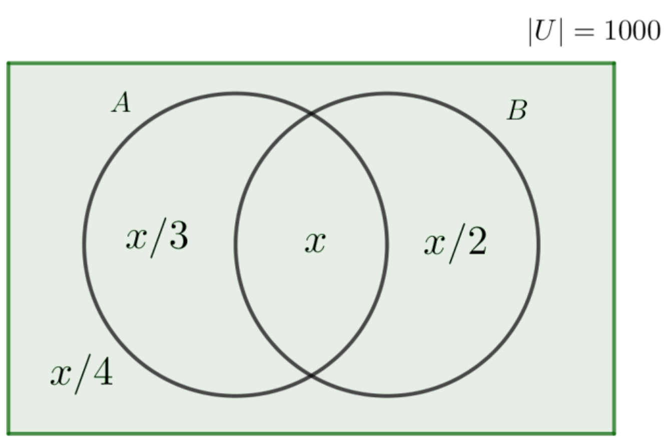


Figura 1.2

Respuesta correcta: C)

3.2 ¿A cuántos de estos 1000 estudiantes les agrada la música clásica?

A) 720

B) 160

C) 240

D) 120

El **cardinal de la unión de dos conjuntos finitos ajenos** A y B es $|A \cup B| = |A| + |B|$.

La **diferencia** de dos conjuntos B y A es $B - A = \{x \in B : x \notin A\}$.

Si B es un conjunto finito y $A \subseteq B$, entonces $|B - A| = |B| - |A|$.

Solución:

Como se vio en el reactivo anterior, si x es el número de estudiantes a los que les gustan ambos tipos de música, se debe satisfacer la ecuación $\frac{x}{3} + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 1000$, que tiene la solución $x = 480$.

El número de estudiantes encuestados a los que les gusta la música clásica es la suma del número de los que prefieren ambos géneros de música y del número de los estudiantes que sólo prefieren la música clásica, es decir

$$x + \frac{x}{2} = 480 + \frac{480}{2} = 480 + 240 = 720.$$

Respuesta correcta: A)

3.3 ¿A cuántos de los 1000 estudiantes encuestados no les agrada la música clásica?

A) 760

B) 120

C) 640

D) 280

Solución:

Sabemos que el número de estudiantes a los que les gustan ambos tipos de música es $x=480$, y a los que les agrada sólo la música clásica son $\frac{x}{2}=\frac{480}{2}=240$ y el número de alumnos a los que les gusta la música clásica es

$$|B| = x+\frac{x}{2} = 480+240 = 720.$$

La solución al reactivo es el cardinal del complemento del conjunto de alumnos a los que les gusta la música clásica:

$$|B^c| = |U| - |B| = 1000-720 = 280.$$

Respuesta correcta: D)

3.4 ¿A cuántos de los estudiantes les agrada sólo el rock o únicamente la música clásica?
A) 280
B) 480
C) 400
D) 240

Solución:

Para responder este reactivo se debe calcular el cardinal de la unión $(A-B)\cup(B-A)$ porque $A-B$ es el conjunto de los alumnos a los que les gusta sólo el rock y $B-A$ es el conjunto de alumnos a los que les agrada sólo la música clásica. Nótese que $A-B$ y $B-A$ son conjuntos ajenos y que por los datos iniciales del problema se tiene $|A-B|=\frac{x}{3}$ y $|B-A|=\frac{x}{2}$ donde x es el número de estudiantes a los que les gustan ambos tipos de música. En el reactivo 3.1 se dedujo que $x=480$ por tanto la solución al reactivo 3.4 es

$$|(A-B)\cup(B-A)| = |A-B|+|B-A| = \frac{x}{3}+\frac{x}{2} = \frac{480}{3}+\frac{480}{2} = 160+240 = 400,$$

porque el cardinal de una unión de conjuntos ajenos es la suma de los cardinales de los conjuntos de acuerdo a la propiedad mencionada en el recuadro del reactivo 3.1.

Respuesta correcta: C)

AUTOEVALUACIÓN.

Situación 4. Conjuntos y números naturales.

Un número natural distinto de la unidad es un **número primo** si sus únicos divisores o factores positivos, son él mismo y el número uno (la unidad).
El primo más grande conocido hasta el momento (27 de enero de 2019), es $2^{82589933}-1$.
Sean $U=\mathbb{N}$, $C=\left\{n\in\mathbb{N}:n\geq 2^{82589933}-1\right\}$ y $D=\left\{n\in\mathbb{N}:n<2^{82589933}-1\right\}$.

4.1 Calcula el conjunto $C-D$

A) $C-\left\{2^{82589933}-1\right\}$

B) C

C) $D\cup\left\{2^{82589933}-1\right\}$

D) D

4.2 Calcula $C\cap D^{c}$, donde el complemento es en $U=\mathbb{N}$

A) $\varnothing$
B) $\mathbb{N}$
C) D
D) C

4.3 ¿A qué es igual el conjunto $D-C$?

A) $C-D$
B) C
C) D
D) $\varnothing$

4.4 Calcula $C^{c}\cup D^{c}$, donde el complemento se toma en $U=\mathbb{N}$.

A) $\varnothing$
B) $\mathbb{N}$
C) D
D) C

BIBLIOGRAFÍA

Cárdenas, H., LLuis, E., Raggi, F. & Tomás, F. (2007). *Álgebra Superior*. México: Trillas.

De Oteyza, E. et al. (2016). *Temas Selectos de Matemáticas*. México: Pearson Educación.

Epp, S. (2012). *Matemáticas discretas con aplicaciones*. México: Cengage Learning.

Jiri, M., Jaroslav N. (2008). *Invitación a la matemática discreta*. Barcelona: Reverté.

Swokowski, E. & Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Cengage Learning.

MESOGRAFÍA

Página interactiva para practicar relaciones y operaciones básicas de conjuntos
https://www.thatquiz.org/es-p/matematicas/conjuntos/
recuperada el 5 de abril de 2019.

UNIDAD 2. LÓGICA

Objetivos específicos

El alumno:

- Desarrollará un pensamiento racional y abstracto, mediante el empleo de la lógica para argumentar tanto en la vida profesional como en la cotidiana.
- Demostrará o refutará formalmente una proposición, apoyándose en los axiomas lógicos, para deducir los modos de inferencia más usados en los argumentos matemáticos.

Situación 1. Promesas.

Juan recuerda que su madre, una mujer que siempre cumple lo que promete, un día le dijo: "*Si apruebas todas las materias y obtienes promedio mayor a 9 entonces te compro un carro*"

1.1 La afirmación de la madre es una

A) condicional
B) conjunción
C) disyunción
D) cuantificación

> En lo que sigue las letras $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ representan proposiciones
>
> Una proposición de la forma:
> *"Si $\mathcal{P}$ entonces $\mathcal{Q}$"*
> es una condicional.

Solución:

La proposición:

"*Si apruebas todas las materias y obtienes promedio mayor a 9 entonces te compro un carro.*"

es una condicional

Respuesta correcta: A)

1.2 Si la madre no le compró el carro a su hijo, fue porque:

A) Juan no obtuvo promedio mayor a 9 o Juan no aprobó ninguna materia
B) Juan obtuvo promedio menor a 9 o Juan no aprobó todas las materias
C) Juan no obtuvo promedio mayor a 9 o Juan no aprobó alguna materia
D) Juan obtuvo promedio menor a 9 o Juan no aprobó alguna materia

En lo que sigue las letras P y Q representan proposiciones

- *El modo de inferencia*
  *"**Si** si P entonces Q, y no Q **entonces** no P"*
  es llamado modus tollens

- *Si* P es la conjunción:
  R *y* S
  La negación de P *es*
  "No R ó no S"

Solución:

Si Juan hubiera logrado la condición que su madre le pidió, ella le hubiera comprado un carro, puesto que ella cumple lo que promete. Como no le compró el carro, significa que Juan no consiguió la condición

La condición que Juan no cumplió es:

"Apruebas todas las materias y obtienes promedio mayor a 9"

Así que lo que ocurrió fue lo contrario

"No apruebas alguna materia o no obtienes promedio mayor a 9"

Por lo que Juan no aprobó alguna materia o no obtuvo promedio mayor a 9. O equivalentemente:

Juan no obtuvo promedio mayor a 9 o no aprobó alguna materia

Respuesta correcta: C)

1.3 La negación de la afirmación de la madre es

A) Si no apruebas todas las materias y no obtienes promedio mayor a 9 entonces no te compro un carro.
B) Si apruebas todas las materias y obtienes promedio mayor a 9 entonces no te compro un carro."
C) Apruebas todas las materias y obtienes promedio mayor a 9, y no te compro un carro.
D) No apruebas todas las materias y no obtienes promedio mayor a 9, y no te compro un carro.

En lo que sigue las letras $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ representan proposiciones

- **La negación de la condicional**:
  "Si $\mathcal{P}$ entonces $\mathcal{Q}$"
  es
  "$\mathcal{P}$ y no $\mathcal{Q}$"

Solución:

La afirmación de la madre es la condicional:

"*Si apruebas todas las materias y obtienes promedio mayor a 9 entonces te compro un carro"*

Y su negación es:

"Apruebas todas las materias y obtienes promedio mayor a 9 y no te compro un carro"

Respuesta correcta: C)

1.4 Una afirmación equivalente a la afirmación de la madre es

A) Si no te compro un carro entonces no apruebas todas las materias y no obtienes promedio mayor a 9.
B) Si no te compro un carro entonces obtienes promedio menor a 9 o no apruebas todas las materias.
C) No apruebas todas las materias y obtienes promedio mayor a 9, o no te compro un carro.
D) No apruebas todas las materias o no obtienes promedio mayor a 9, o te compro un carro.

En lo que sigue las letras $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ representan proposiciones

- La negación de la proposición:
  "Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ entonces $\mathcal{Q}$"
  es
  "$\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$, y no $\mathcal{Q}$"
- La negación de la proposición:
  "No $\mathcal{R}$ ó no $\mathcal{S}$, ó $\mathcal{Q}$"
  es:
  "$\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$, y no $\mathcal{Q}$"
- Como las proposiciones
  "Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ entonces $\mathcal{Q}$"
  y
  "No $\mathcal{R}$ ó no $\mathcal{S}$, ó $\mathcal{Q}$"
  Tienen la misma negación, son equivalentes.

Solución:

$\mathcal{R}$: *Apruebas todas las materias*

$\mathcal{S}$ **:** *Obtienes promedio mayor a 9*

$\mathcal{Q}$: *Te compro un carro*

Por lo visto en el cuadro anterior, la proposición

"Si apruebas todas las materias y obtienes promedio mayor a 9 entonces te compro un carro"

es equivalente a

"No apruebas todas las materias o no obtienes promedio mayor a 9, o te compro un carro"

Respuesta correcta: D)

Situación 2. Reflexión.

Todo lo que vale la pena cuesta algún trabajo

2.1 La proposición anterior es una

A) condicional
B) conjunción
C) disyunción
D) cuantificación

En lo que sigue la letra $\mathcal{P}$ representa una proposición, y la letra α representa una propiedad

Una proposición de la forma:
"Todo lo que tenga la propiedad α, $\mathcal{P}$"
es una **cuantificación universal**

Solución:

La proposición *"Todo lo que vale la pena cuesta algún trabajo"* es una cuantificación universal.

Nota: En este caso la propiedad α es "valer la pena" y la proposición $\mathcal{P}$ es "Cuesta algún trabajo"

Respuesta correcta: A)

2.2 La proposición escrita en lenguaje analítico es

A) Para todo x, x vale la pena y existe z tal que z es trabajo y x cuesta z
B) Para todo x, x vale la pena y existe z tal que z es trabajo y x cuesta x
C) Para todo x, si x vale la pena entonces existe z tal que z es trabajo y x cuesta z
D) Para todo x, si x vale la pena entonces existe z tal que z es trabajo y z cuesta x

En lo que sigue las letras $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ representan proposiciones, y las letras α y β representan propiedades (características)

"El lenguaje analítico fue introducido por Weierstrarss en 1871 para definir la continuidad de una función"(1). "En el **lenguaje analítico** se puede decir explícitamente lo que en el lenguaje ordinario está implícito. Y sólo se requiere implementar el lenguaje ordinario mediante variables $x, y, z, \ldots$ *y mediante las expresiones* ***para todo*** x, ***existe*** x ***tal que****, para obtener el lenguaje analítico"* (1)

Las cuantificaciones en lenguaje coloquial se pueden traducir al lenguaje analítico. A continuación presentamos las traducciones del lenguaje coloquial al analítico.

Todo lo que tiene la propiedad α, $\mathcal{P}$	coloquial
Para todo x, *si* x tiene la propiedad α entonces $\mathcal{P}$	analítico
Algo tiene la propiedad β, *y* $\mathcal{Q}$	coloquial
Existe z *tal que* z *tiene la propiedad* β, *y* $\mathcal{Q}$	analítico

Debe tenerse presente que las proposiciones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ pueden ser de cualquier tipo (simples, conjunciones, disyunciones, condicionales o cuantificaciones). En el caso de que se trate de cuantificaciones es recomendable traducir en etapas, tantas etapas como cuantificadores haya.

(1) Zubieta, G. (1992). *Taller de Lógica Matemática.* Análisis Lógico. México: McGraw-Hill.

Solución:

Todo lo que vale la pena cuesta algún trabajo	Coloquial
Para todo x, si x vale la pena entonces x cuesta algún trabajo	Traducción parcial
Para todo x, si x vale la pena entonces existe z tal que z *es* trabajo y x cuesta z	Traducción al lenguaje analítico

Respuesta correcta: C)

2.3 La negación de la proposición es
A) Nada de lo que vale la pena cuesta trabajo
B) Todo lo que vale la pena no cuesta trabajo
C) Algo vale la pena y no cuesta trabajo
D) Algo vale la pena y no cuesta ningún trabajo

En lo que sigue la letra $\mathcal{Q}$ representa una proposición, y las letras α y β representan una propiedad.

- La negación de una cuantificación universal es una cuantificación existencial, cuyo cuantificando es la negación del cuantificando de la primera.

  La negación de
  "Todo lo que tenga la propiedad α, $\mathcal{Q}$"
  es
  "Algo que tenga la propiedad α, no $\mathcal{Q}$"

- La negación de una cuantificación existencial es una cuantificación universal, cuyo cuantificando es la negación del cuantificando de la primera.

  La negación de
  "Algo que tenga la propiedad β, $\mathcal{Q}$"
  es
  "Todo lo que tenga la propiedad β, no $\mathcal{Q}$"

- En español se acostumbra decir
  "Ninguno que tenga la propiedad β, $\mathcal{Q}$"
  en lugar de
  "Todo lo que tenga la propiedad β, no $\mathcal{Q}$"

Solución:

La negación de

"Todo lo que vale la pena cuesta algún trabajo"
es
"Algo vale la pena y no cuesta ningún trabajo"

Respuesta correcta: D)

2.4 La negación en lenguaje analítico de la proposición es

A) Para todo x, si x vale la pena entonces x no cuesta trabajo.
B) Para todo x, si x vale la pena entonces existe z tal que z es trabajo y x no cuesta z
C) Existe x tal que x vale la pena y no cuesta trabajo
D) Existe x tal que x vale la pena y para todo z, si z es trabajo entonces x no cuesta z

- La negación de una cuantificación universal es una cuantificación existencial.
  La negación de
  Para todo x, si x tiene la propiedad α entonces $\mathcal{P}$
  es
  Existe x tal que x tiene la propiedad α y no $\mathcal{P}$

- La negación de una cuantificación existencial es una cuantificación universal
  La negación de
  "Existe x tal que x tiene la propiedad β y $\mathcal{Q}$"
  es
  "Para todo x, x no tiene la propiedad β o no $\mathcal{Q}$"
  También es negación
  "Para todo x, si x tiene la propiedad β entonces no $\mathcal{Q}$"

Solución:

La negación de una cuantificación universal

"Para todo x, si x vale la pena entonces existe z tal que z es trabajo y x cuesta z"

es

"Existe x tal que x vale la pena y para todo z, z no es trabajo o x no cuesta z"

También es negación:

"Existe x tal que x vale la pena y para todo z, si z es trabajo entonces x no cuesta z"

Respuesta correcta: D)

Situación 3. Tablas de verdad.

Como en matemáticas existen símbolos para denotar diversos objetos (relaciones, conjuntos, propiedades) así en lógica existen símbolos para denotar diversas expresiones. La lógica simbólica nos facilita visualizar la forma de la proposición.

Para analizar los valores de verdad de una proposición nos basamos en tres principios de la **lógica clásica:**
El principio del tercero excluido afirma que dada una proposición ésta es verdadera o su negación lo es, es decir no puede ocurrir que ninguna sea verdadera (éste es el caso que se excluye)
El principio de no contradicción que afirma que no es posible que una proposición y su negación sean ambas verdaderas.
Y el **principio de bivalencia** afirma que sólo hay dos posibilidades para una proposición que sea verdadera o que sea falsa

De acuerdo con lo anterior si tenemos dos proposiciones P y Q, hay cuatro casos posibles, que las dos sean verdaderas, que P sea verdadera y Q falsa, que P sea falsa y Q verdadera, o bien que las dos sean falsas. Todo esto se resume en la siguiente tabla:

Proposición	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F

3.1 Los correspondientes valores de verdad para la proposición:

$[(P \to Q) \wedge P] \to Q$ son:

A)

$[(P \to Q) \wedge P] \to Q$	V	V	F	F

B)

$[(P \to Q) \wedge P] \to Q$	F	F	V	V

C)

$[(P \to Q) \wedge P] \to Q$	V	V	V	V

D)

$[(P \to Q) \wedge P] \to Q$	F	F	F	F

- Una proposición de la forma $\mathcal{R} \to \mathcal{S}$ es una **condicional** (Si $\mathcal{R}$ entonces $\mathcal{S}$)
- A la proposición "$\mathcal{R}$" se le llama hipótesis de la condicional "$\mathcal{R} \to \mathcal{S}$"
- A la proposición "$\mathcal{S}$" se le llama hipótesis de la condicional "$\mathcal{R} \to \mathcal{S}$"
- Una proposición de la forma $\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$ es una **conjunción** ($\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$)
- A las proposiciones "$\mathcal{R}$" y "$\mathcal{S}$" se les llama componentes de la conjunción "$\mathcal{R} \wedge \mathcal{S}$"
- **Una condicional es verdadera** si y sólo si la hipótesis es falsa o bien la tesis es verdadera.
- **Una conjunción es verdadera** si y sólo si las dos componentes son verdaderas.
- Observación una proposición de la forma $[(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{P}] \to \mathcal{Q}$ es conocida con el nombre *modus ponens*. Saber esto, como cultura general es valioso, sin embargo, desde el enfoque de las matemáticas no es necesario memorizar estos nombres, lo importante es conocer los modos de inferencia básicos y las condiciones que garantizan cuando una proposición (conjunción, disyunción, condicional) es verdadera.

Solución:

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$	V	F	V	V
$[(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{P}$	V	F	F	F
$[(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{P}] \to \mathcal{Q}$	V	V	V	V

Respuesta correcta: C)

3.2 Los valores de verdad correspondientes para la proposición:

$[(P \vee Q) \rightarrow P] \rightarrow \sim Q$ son

A)

$[(P \vee Q) \rightarrow P] \rightarrow \sim Q$	V	F	V	F

B)

$[(P \vee Q) \rightarrow P] \rightarrow \sim Q$	V	V	F	F

C)

$[(P \vee Q) \rightarrow P] \rightarrow \sim Q$	F	V	V	V

D)

$[(P \vee Q) \rightarrow P] \rightarrow \sim Q$	F	V	F	V

- Una proposición de la forma $R \vee S$ es una **disyunción** (R ó S)
- Una proposición de la forma $R \rightarrow S$ es una **condicional** (Si R entonces S)
- Una proposición de la forma $\sim R$ es una **negación** (No R). (En algunos textos se usa $\neg R$ en vez de $\sim R$)
- Una **disyunción es verdadera** si y sólo si alguna de sus componentes es verdadera.
- Una **condicional es verdadera** si y sólo si la hipótesis es falsa o bien la tesis es verdadera.
- **Una proposición y su negación tienen valores de verdad opuestos** entre sí.

Solución:

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
$\sim Q$	F	V	F	V
$P \vee Q$	V	V	V	F
$(P \vee Q) \rightarrow P$	V	V	F	V
$[(P \vee Q) \rightarrow P] \rightarrow \sim Q$	F	V	V	V

Respuesta correcta: C)

3.3 Los valores de verdad correspondientes para la proposición:

$\sim(\sim P \wedge Q) \rightarrow (P \vee \sim Q)$ son

A)

$\sim(\sim P \wedge Q) \rightarrow (P \vee \sim Q)$	F	F	F	F

B)

$\sim(\sim P \wedge Q) \rightarrow (P \vee \sim Q)$	V	F	V	F

C)

$\sim(\sim P \wedge Q) \rightarrow (P \vee \sim Q)$	F	V	F	V

D)

$\sim(\sim P \wedge Q) \rightarrow (P \vee \sim Q)$	V	V	V	V

Solución:

- Una proposición y su negación tienen valores de verdad opuestos entre sí.
- **Una conjunción es verdadera** si y sólo si las dos componentes son verdaderas.
- **Una condicional es verdadera** si y sólo si la hipótesis es falsa o bien la tesis es verdadera.
- **Una disyunción es verdadera** si y sólo alguna de sus componentes son verdaderas.

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
$\sim P$	F	F	V	V
$\sim Q$	F	V	F	V
$\sim P \wedge Q$	F	F	V	F
$\sim(\sim P \wedge Q)$	V	V	F	V
$P \vee \sim Q$	V	V	F	V
$\sim(\sim P \wedge Q) \rightarrow (P \vee \sim Q)$	V	V	V	V

Respuesta correcta: D)

3.4 Los valores de verdad correspondientes para la proposición:

$[(P \to Q) \wedge \sim Q] \to \sim P$

son

A)

$[(P \to Q) \wedge \sim Q] \to \sim P$	V	V	F	F

B)

$[(P \to Q) \wedge \sim Q] \to \sim P$	F	F	V	V

C)

$[(P \to Q) \wedge \sim Q] \to \sim P$	V	V	V	V

D)

$[(P \to Q) \wedge \sim Q] \to \sim P$	F	V	F	V

- Una **condicional es verdadera** si y sólo si la hipótesis es falsa o bien la tesis es verdadera.
- Una proposición y su negación tienen **valores de verdad opuestos** entre sí.
- Una **conjunción es verdadera** si y sólo si las dos componentes son verdaderas.
- Observación una proposición de la forma $[(P \to Q) \wedge \sim Q] \to \sim P$ es conocida con el nombre *modus tollens*. En matemáticas no es necesario memorizar estos nombres, lo importante es conocer los modos de inferencia básicos y las condiciones que garantizan cuando una proposición (conjunción, disyunción, condicional) es verdadera.

Solución:

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
$\sim P$	F	F	V	V
$\sim Q$	F	V	F	V
$P \to Q$	V	F	V	V
$(P \to Q) \wedge \sim Q$	F	F	F	V
$[(P \to Q) \wedge \sim Q] \to \sim P$	V	V	V	V

Respuesta correcta: C)

Situación 4. Descartes.

Al matemático René Descartes (1596-1650) se le atribuye la frase "Pienso, luego existo" esta frase puede expresarse como "Si pienso entonces existo"

4.1 La frase de Descartes es equivalente a

A) Existo y no pienso
B) Si no existo entonces no pienso
C) No existo y pienso
D) Si no pienso entonces no existo

- La **contrapuesta** de la condicional
  "Si $\mathcal{P}$ entonces $\mathcal{Q}$"
  es
  "Si no $\mathcal{Q}$ entonces no $\mathcal{P}$"
- Una **condicional y su contrapuesta son equivalentes**

Solución:

La contrapuesta de la condicional
"Si pienso entonces existo"
es
"Si no existo entonces no pienso"

Respuesta correcta: B)

4.2 La frase de Descartes es equivalente a

A) Existo o no pienso
B) Si existo entonces pienso
C) No existo o no pienso
D) Si no existo entonces no pienso

- La **negación de la condicional**
  "Si $\mathcal{P}$ entonces $\mathcal{Q}$"
  es
  "$\mathcal{P}$ y no $\mathcal{Q}$"

- La **negación de la disyunción**
  "$\mathcal{Q}$ ó no $\mathcal{P}$"
  es
  "no $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{P}$"

- Como las proposiciones

  “Si $\mathcal{P}$ entonces $\mathcal{Q}$ ”

  y

  “$\mathcal{Q}$ ó no $\mathcal{P}$ ”

  tienen la misma negación (salvo por el orden), son **equivalentes** entre sí.

  Es decir

  “Si $\mathcal{P}$ entonces $\mathcal{Q}$ ”

  y

  “$\mathcal{Q}$ ó no $\mathcal{P}$ ”

  son equivalentes.

  Una analogía a lo arriba expresado en esta última viñeta es que:
  Si a y b son números y $-a=-b$ entonces $a=b$.

Solución:

La negación de la condicional
“Si pienso entonces existo”
es
“Pienso y no existo”

La negación de la disyunción
“Existo o no pienso”
es
“No existo y pienso”

Como las proposiciones
“Si pienso entonces existo”
y
“Existo o no pienso”

tienen la misma negación (salvo por el orden), son equivalentes entre sí.

Respuesta correcta: A)

4.3 La negación de la frase de Descartes es equivalente a

A) no existo y no pienso
B) Si no existo entonces no pienso
C) No existo y pienso
D) Si existo entonces no pienso

- La **negación de la condicional**
  "Si P entonces Q"
  es
  "P y no Q"

Solución:

La negación de la condicional
"Si pienso entonces existo"
es
"Pienso y no existo"
o bien
"No existo y pienso"

Respuesta correcta: C)

4.4 La recíproca de la frase de Descartes es equivalente a

A) Existo o pienso
B) Existo o no pienso
C) No existo o pienso
D) No existo o no pienso

- La **recíproca** de la condicional
  "Si P entonces Q"
  es
  "Si Q entonces P"

- La **negación** de la condicional
  "Si Q entonces P"
  es
  "Q y no P"

- La **negación** de la disyunción
  "P ó no Q"
  es
  "No P y Q"

- Como las proposiciones
  "Si Q entonces P"
  y
  "P ó no Q"

tienen la misma negación (salvo por el orden), son **equivalentes** entre sí.

Solución:

La recíproca de la condicional
"Si pienso entonces existo"
es
"Si existo entonces pienso"

La negación de la condicional
“Si existo *entonces pienso”*
es
“Existo y no pienso”

La negación de la disyunción
“Pienso o no existo”
es
“No pienso y existo”
Como las proposiciones
“Si existo entonces pienso”
y
“Pienso o no existo”
tienen la misma negación (salvo por el orden), son equivalentes entre sí.

Respuesta correcta: C)

AUTOEVALUACIÓN

Situación 5. Preocupación.

Un profesor se encuentra muy preocupado y dice: “Ningún alumno resolvió todas las preguntas”

5.1 La frase del profesor en lenguaje analítico es

A) Para todo x, si x es alumno entonces para todo z, si z es pregunta entonces x no resolvió z
B) Para todo x, si x es alumno entonces existe z tal que z es pregunta y x no resolvió z
C) Para todo x, x es alumno y existe z tal que z es pregunta y x no resolvió z
D) Para todo x, x es alumno y para todo z, z es pregunta y x no resolvió z

5.2 La negación de la frase del profesor en lenguaje analítico es

A) Existe x tal que x es alumno y para todo z, si z es pregunta entonces x no resolvió z
B) Existe x tal que x es alumno y para todo z, si z es pregunta entonces x resolvió z
C) Existe x tal que x es alumno y existe z tal que z es pregunta y x no resolvió z
D) Existe x tal que x es alumno y existe z tal que z es pregunta y x resolvió z

5.3 La negación de la frase del profesor en lenguaje coloquial es

A) Todos los alumnos resolvieron todas las preguntas
B) Todos los alumnos resolvieron alguna pregunta
C) Algún alumno no resolvió una pregunta
D) Algún alumno resolvió todas las preguntas

5.4 Si Luis es alumno del profesor entonces

A) Luis resolvió todas las preguntas
B) Luis resolvió alguna pregunta
C) Luis no resolvió ninguna pregunta
D) Luis no resolvió alguna pregunta

MESOGRAFÍA

Zubieta, G. (2002). *Lógica deductiva.* [En línea] México: Sociedad Matemática Mexicana. Disponible en http://www.pesmm.org.mx/Serie%20Textos_archivos/T1.pdf

BIBLIOGRAFÍA

Zubieta, G. (1999). *Manual de Lógica para Estudiantes de Matemáticas.* México, Trillas.

Zubieta, G. (1992). *Taller de Lógica Matemática.* Análisis Lógico. México: McGraw-Hill.

UNIDAD 3. MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS

Objetivo específico

El alumno:

- Formulará y demostrará proposiciones matemáticas, mediante los métodos de demostración directa, indirecta o de inducción matemática, con el fin de desarrollar tanto su capacidad argumentativa, como un pensamiento abstracto, crítico y creativo que le permitirán construir nuevos conocimientos**.**

Una **demostración** de una proposición $\mathcal{P}$ es un *argumento* que justifica dicha proposición. Consta de un número finito de pasos.

- Cada uno de los pasos incluye una *proposición* y una *explicación* del porqué se dice tal proposición.
- La proposición de cada paso es: o un axioma, o un dato, o una hipótesis, o una definición, o un teorema, o una inferencia lógica, o bien una proposición que se infiere de algunos de los pasos anteriores
- La explicación en cada paso es: axioma, o dato, o hipótesis, o definición, o teorema, o el nombre de la inferencia lógica, o las referencias de los pasos de los cuales se infiere. O una combinación de éstos.
- La inferencia de unos pasos a otro es una condicional la cual es verdadera por ser un axioma, o por ser un dato, o por ser una hipótesis, o por ser una definición, o por ser un teorema o por ser una inferencia lógica.
- La afirmación en el último paso es la proposición $\mathcal{P}$

Modos lógicos de inferencia básicos:

(En lo que sigue, tanto $\mathcal{P}$ como $\mathcal{Q}$ representan proposiciones)

- **De lo idéntico:**

  Si $\mathcal{P}$ entonces $\mathcal{P}$
- **De la conjunción a la parte:**

✓ Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ entonces $\mathcal{P}$

✓ Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ entonces $\mathcal{Q}$

- **De la parte a la disyunción:**

✓ Si $\mathcal{P}$ entonces $\mathcal{P}$ ó $\mathcal{Q}$

✓ Si $\mathcal{Q}$ entonces $\mathcal{P}$ ó $\mathcal{Q}$

- **De lo específico a lo inespecífico:**

✓ Si a tiene la propiedad β entonces existe x tal que x tiene la propiedad β

✓ Si a está en A y a tiene la propiedad β entonces existe x en A tal que x tiene la propiedad β

- **De lo general a lo particular:**
- ✓ Si para todo x, x tiene la propiedad β entonces a tiene la propiedad β.
- ✓ Si para todo x en A, x tiene la propiedad β y a está en A entonces a tiene la propiedad β.

Como se puede observar los modos lógicos de inferencia mencionados siempre “se pasa” de más información a menos información, excepto en el modo “De lo idéntico”, en donde no se pierde información, se dice exactamente lo mismo. Pero lo que no ocurre es que “se pase” de menos información a más.

Un **teorema** es una proposición que ya ha sido demostrada.

Para el principiante en el tema de demostraciones es conveniente escribir las afirmaciones en una columna a la izquierda y los correspondientes argumentos a la derecha.

A continuación, damos un ejemplo de demostración directa, este ejemplo lo presentamos dos veces. En la primera presentación se escriben explícitamente, algunas palabras que en la práctica cotidiana se omiten puesto que se dan por sentadas, y que también se omiten en pos de la sencillez y para evitar ser repetitivo. La segunda presentación las palabras “*afirmación”, “argumento”, “se infiere de”* aparecen en forma implícita.

Primera demostración de que $A-B\subset A\cap B^c$

$A-B\subset A\cap B^c$

es decir

Si $x\in A-B$ entonces $x\in A\cap B^c$

Demostración

Afirmación	Argumento
(1) $x\in A-B$	Es la hipótesis de la condicional
(2) $x\in A$ y $x\notin B$	Se infiere de (1). Por definición de diferencia
(3) $x\in A$	Se infiere de (2). De la conjunción a la parte
(4) $x\notin B$	Se infiere de (2). De la conjunción a la parte
(5) $x\in B^C$	Se infiere de (4). Por definición de complemento
(6) $x\in A$ y $x\in B^C$	Se infiere de (4) y (5) De lo idéntico
(7) $x\in A\cap B^c$	Se infiere de (6) y (5). Por definición de intersección.

Segunda demostración de que $A-B \subset A \cap B^c$

$A-B \subset A \cap B^c$

es decir

Si $x \in A-B$ entonces $x \in A \cap B^c$

Demostración

(1) $x \in A-B$ Hipótesis
(2) $x \in A$ y $x \notin B$ (1) Definición de diferencia
(3) $x \in A$ (2) De la conjunción a la parte
(4) $x \notin B$ (2) De la conjunción a la parte
(5) $x \in B^C$ (4) Definición de complemento
(6) $x \in A$ y $x \in B^C$ (3) y (5) De lo idéntico
(7) $x \in A \cap B^c$ (6) y (5) Definición de intersección.

Así como para aprender a conducir un automóvil se debe conducir un automóvil, o para aprender a nadar hay que nadar, para aprender a demostrar hay que demostrar. Sin embargo, para atender a la problemática de crear y resolver un examen de opción múltiple, en las siguientes *situaciones* se presentan demostraciones "casi completas" en las que se han omitido partes de la demostración (o bien una *afirmación*, o bien un *argumento*, o parte de un argumento) con la finalidad de que tú digas lo que se ha omitido. A continuación, te presentamos un ejemplo.

$A \cap B^c \subset A-B$

es decir

Si $x \in A \cap B^c$ entonces $x \in A-B$

Demostración "casi completa"

(1) $x \in A \cap B^c$ ------------
(2) $x \in A$ y $x \in B^C$ ------------
(3) $x \in A$ (2) De la conjunción a la parte
(4) ------------ (2) De la conjunción a la parte
(5) $x \notin B$ (4) Definición de complemento
(6) $x \in A$ y $x \notin B$ (3) y (5) De lo idéntico
(7) $x \in A-B$ (6) Definición de diferencia

La demostración completa quedaría

(1) $x \in A \cap B^c$ Hipótesis

(2) $x \in A$ y $x \in B^C$ (1) Definición de intersección

(3) $x \in A$ (2) De la conjunción a la parte

(4) $x \in B^C$ (2) De la conjunción a la parte

(5) $x \notin B$ (4) Definición de complemento

(6) $x \in A$ y $x \notin B$ (3) y (5) De lo idéntico

(7) $x \in A - B$ (6) Definición de diferencia

Nota importante: Debes tener presente que en un examen de opción múltiple no basta (ni siquiera es necesario) escribir en las líneas en blanco, sino que debes **elegir la respuesta correcta entre las opciones y llenar el alveolo correspondiente**.

Después de las aclaraciones anteriores, estamos listos para trabajar con *situaciones* (como en las unidades anteriores).

Situación 1. Demostración directa.

La siguiente es una demostración (en la que se han omitido algunos argumentos) de que $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^c$, o lo que es lo mismo

Si $x \in A^C \cap B^C$ entonces $x \in (A \cup B)^c$

Demostración

(1) $x \in A^C \cap B^C$ Hpt

(2) $x \in A^C$ y $x \in B^C$ (1) -----------

(3) $x \in A^C$ (2) De la conjunción a la parte

(4) $x \in B^C$ (2) De la conjunción a la parte

(5) $x \notin A$ (3) Definición de complemento

(6) $x \notin B$ (4) Definición de complemento

(7) $x \notin A$ y $x \notin B$ (5) y (6) De lo idéntico

(8) $x \notin A \cup B$ ----------- -----------

(9) $x \in (A \cup B)^c$ (8) Definición de complemento

1.1 El argumento que explica porque el paso (2) se infiere del paso (1) es:

A) De la parte a la conjunción
B) Definición de intersección
C) Definición de complemento
D) De la conjunción a la parte

Definición implícita de **intersección**:
Si $x \in R$ y $x \in S$ entonces $x \in R \cap S$
y
Si $x \in R \cap S$ entonces $x \in R$ y $x \in S$

Solución:

La inferencia del paso (1) al (2) es

Si $x \in A^c \cap B^c$ entonces $x \in A^c$ y $x \in B^c$

Esta condicional es verdadera por la definición de intersección.

Respuesta correcta: B)

1.2 La justificación del paso (8) es:

A) (7) Definición de unión, girada
B) (7) Definición de intersección, girada
C) (7) Definición de conjunción
D) (7) Definición de unión

- Definición implícita de **unión**:
  Si $x \in R$ ó $x \in S$ entonces $x \in R \cup S$
  y
  si $x \in R \cup S$ entonces $x \in R$ ó $x \in S$

- La **contrapuesta** de la segunda condicional es:
  Si $x \notin R$ y $x \notin S$ entonces $x \notin R \cup S$

- Una condicional y su contrapuesta son **equivalentes**, es decir una es un **giro** de la otra.

Solución:

El paso (8) es "$x \notin A \cup \mathrm{B}$"
Y el paso (7) es "$x \notin A$ y $x \notin B$"
Por lo que la inferencia de (7) a (8) es
"Si $x \notin A$ y $x \notin B$ entonces $x \notin A \cup \mathrm{B}$"
Y ésta es válida por la definición de unión, girada.

Respuesta correcta: A)

1.3 La inferencia del paso (8) al (9) es:

A) Si $x \in A \cup \mathrm{B}$ entonces $x \in (A \cup \mathrm{B})^c$

B) Si $x \in (A \cup \mathrm{B})^c$ entonces $x \notin A \cup \mathrm{B}$

C) Si $x \notin A \cup \mathrm{B}$ entonces $x \in (A \cup \mathrm{B})^c$

D) Si $x \notin (A \cup \mathrm{B})^c$ entonces $x \notin A \cup \mathrm{B}$

Una **inferencia** es una condicional, en donde la tesis es la afirmación del paso que se concluye y la hipótesis consta de los pasos de los que se infiere la conclusión.

Solución:

En este caso la afirmación del paso (9) es, "$x \in (A \cup \mathrm{B})^c$", es la conclusión (tesis) y la afirmación del paso (8) es "$x \notin A \cup \mathrm{B}$", es el fundamento (hipótesis).
Por lo que la inferencia es: "Si $x \notin A \cup \mathrm{B}$ entonces $x \in (A \cup \mathrm{B})^c$"

Respuesta correcta: C)

1.4 Las inferencias que son válidas por su forma y no por su contenido son:

A) De (3) a (2). De (4) a (2). De (7) a (5) y (6)

B) De (2) a (3). De (2) a (4). De (5) y (6) a (7)

C) De (1) a (2). De (3) a (5). De (4) a (6)

D) De (2) a (3). De (7) a (8). De (8) a (9)

Una **proposición es válida por su forma**, si no depende de los contenidos. Una proposición es válida por su forma si es válida en cualquier contexto.

Solución:

La inferencia de (4) a (6) se basa en la definición de complemento, contenido propio de la teoría de conjuntos.

La inferencia de (8) a (9) se basa en la definición de complemento, contenido propio de la teoría de conjuntos.
Las inferencias que se marcan en la respuesta A) no tienen sentido porque no se puede inferir una proposición de otra que aún no se conoce o que aparecerá posteriormente.
La inferencia de (2) a (3) es una condicional del tipo: *"Si P y Q entonces P"*
(De la conjunción a la parte, válida por su forma)

La inferencia de (2) a (4) es una condicional del tipo: *"Si P y Q entonces Q"*
(De la conjunción a la parte, válida por su forma)

La inferencia de (5) y (6) a (7) es una condicional de la forma: *"Si P entonces P"*
(De lo idéntico, válida por su forma)

Resumiendo, las inferencias que son válidas por su forma son:

De (2) a (3). De (2) a (4). De (5) y (6) a (7).

Respuesta correcta: B)

Situación 2. Demostración por casos.

La siguiente es una demostración (en la que se han omitido algunas partes) de que $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$, es decir:
Si $x\in A\cap(B\cup C)$ entonces $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Demostración

(1) $x\in A\cap(B\cup C)$	Hipótesis
(2) $x\in A$ y $x\in B\cup C$	----------- -----------
(3) $x\in A$	(2) Definición de intersección
(4) $x\in B\cup C$	(2) De la conjunción a la parte.
(5) $x\in B$ ó $x\in C$	(4) -----------

(6) Si $x \in \mathrm{B}$ entonces $x \in (A \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$:

(a) $x \in \mathrm{B}$	Hpt de (6)
(b) $x \in A$	(3) De lo idéntico
(c) $x \in A$ y $x \in \mathrm{B}$	(b) y (a) De lo idéntico
(d) $x \in A \cap \mathrm{B}$	(c) Definición de intersección
(e) $x \in A \cap \mathrm{B}$ ó $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{C}$	------------ -----------
(f) $x \in (A \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$	(e) Definición de unión

(7) Si $x \in C$ entonces $x \in (A \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$:

(a) $x \in C$	Hpt de (7)
(b) $x \in A$	(3) De lo idéntico
(c) $x \in A$ y $x \in C$	(b) y (a) De lo idéntico
(d) $x \in A \cap C$	(c) Definición de intersección
(e) $x \in A \cap \mathrm{B}$ ó $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{C}$	
(f) $x \in (A \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$	----------- -----------
	(e) Definición de unión

(8) $x \in (A \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$ ----------- -----------

2.1 La justificación del paso (8) es

A) (f) De lo idéntico
B) (6) y (7) De lo idéntico
C) (6) y (7) Por casos
D) (5), (6) y (7) Por casos

Una demostración **por casos** es necesaria cuando a partir de cierto paso no es posible analizar de la misma manera a los diferentes objetos de los cuales se habla en la proposición.
El número de casos debe ser finito. Si al analizar cada caso se llega a la misma conclusión, se deduce que dicha conclusión es cierta. Una demostración por casos quedaría representada en la Figura 1. conclusión

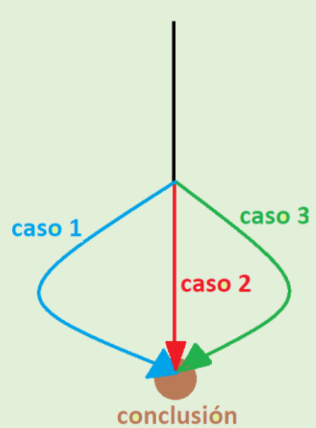


Figura 2.1

Si todos los miembros de la familia pueden ser tratados de la misma forma no es necesario hacer una demostración por casos (o bien podríamos decir que el número de casos es uno).

Solución:

En el paso (5) se abrieron los casos, un caso es que $x \in A$ y el otro es que $x \in B \cup C$
En el paso (6) se analizó el primer caso ($x \in A$), se demostró que:
"Si $x \in A$ entonces $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$"
En el paso (7) se analizó el segundo caso ($x \in B \cup C$), se demostró que:
"Si $x \in B \cup C$ entonces $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$"
Es decir cualquiera que sea el caso ocurre que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Por lo que el argumento del paso (8) es: De (5), (6) y (7) Por casos

Respuesta correcta: D)

2.2 La justificación del paso (2) es:

A) (1) Definición de unión
B) (1) De la parte a la disyunción
C) (1) De la parte a la conjunción
D) (1) Definición de intersección

Definición implícita de **intersección**:

Si $x \in R$ y $x \in S$ entonces $x \in R \cap S$
y
Si $x \in R \cap S$ entonces $x \in R$ y $x \in S$

Solución:

El paso (2) no es un teorema, ni un dato, ni la hipótesis, por lo cual debe inferirse de algún paso previo, en este caso el único paso previo es (1). La inferencia del paso (1) al (2) es:

Si $x \in A \cap (B \cup C)$ entonces $x \in A$ y $x \in B \cup C$

Esta condicional es válida por la definición de intersección

Respuesta correcta: D)

2.3 En la demostración del paso (6), la justificación del paso (e) es:

A) (d) Definición de intersección
B) (d) Definición de unión
C) (d) De la disyunción a la parte
D) (d) De la parte a la disyunción

El modo de inferencia **de la parte a la disyunción** es:

"Si $\mathcal{P}$ entonces $\mathcal{P}$ ó $\mathcal{Q}$"

- Si $\mathcal{P}$ fuera falsa, la condicional sería verdadera por tener hipótesis falsa.
- Si $\mathcal{P}$ fuera verdadera, "$\mathcal{P}$ ó $\mathcal{Q}$" sería verdadera porque tendría una componente verdadera, y entonces la condicional sería verdadera por tener tesis verdadera.
- Cualquiera que sea el caso "*Si* $\mathcal{P}$ *entonces* $\mathcal{P}$ *ó* $\mathcal{Q}$" es verdadera, es decir es una tautología.

Solución:

La inferencia del paso (d) al paso (e) es:

"*Si* $x \in A \cap \mathrm{B}$ *entonces* $x \in A \cap \mathrm{B}$ *ó* $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{C}$"

"$x \in A \cap \mathrm{B}$ *ó* $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{C}$" es una disyunción y "$x \in A \cap \mathrm{B}$" es una componente de dicha disyunción.

Por lo que el argumento es: De la parte a la disyunción

Respuesta correcta: C)

2.5 La justificación del paso (5) es:

A) (4) Definición de unión
B) (4) De la parte a la disyunción
C) (4) Definición de intersección
D) (4) De la parte a la conjunción

La **definición implícita de unión** es

Si $x \in \mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ entonces $x \in \mathrm{B}$ ó $x \in C$
y
Si $x \in \mathrm{B}$ ó $x \in C$ entonces $x \in \mathrm{B} \cup \mathrm{C}$

Solución:

Si el paso (4) es "$x \in \mathrm{B} \cup \mathrm{C}$" y el paso (5) es "$x \in \mathrm{B}$ *ó* $x \in C$", el paso (5) se infiere del paso (4).

La inferencia de (4) a (5) es:

"Si $x \in \mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ entonces $x \in \mathrm{B}$ ó $x \in C$"

La cual es válida por definición de unión.

Respuesta correcta: A)

Situación 3. Demostración por el método de Reducción al absurdo.

La siguiente es una demostración de que $\varnothing \subset \{a, e, o\}$, es decir:

Si $x \in \varnothing$ entonces $x \in \{a, e, o\}$

Demostración por reducción al absurdo

(1) -----------	Negación
(2) $x \in \varnothing$	(1) -----------
(3) Existe z tal que $z \in \varnothing$	(2) -----------
(4) No existe z tal que $z \in \varnothing$	Definición de $\varnothing$

∇_0 (5) Existe z tal que $z \in \varnothing$ y no existe z tal que $z \in \varnothing$ (3) y (4) De lo idéntico

Como la negación de la proposición

"Si $x \in \varnothing$ entonces $x \in \{a, e, o\}$"

nos condujo a un **absurdo**, concluimos que dicha negación es falsa y por tanto

"Si $x \in \varnothing$ entonces $x \in \{a, e, o\}$"

es verdadera.

3.1 El primer paso de la demostración es:

A) Si $x \in \varnothing$ entonces $x \in \{a, e, o\}$

B) $x \in \varnothing$ y $x \notin \{a, e, o\}$

C) Si $x \notin \varnothing$ entonces $x \notin \{a, e, o\}$

D) $x \notin \varnothing$ y $x \in \{a, e, o\}$

Para demostrar una proposición por reducción **al absurdo** se parte de la *negación de la proposición* que se quiere probar. Al continuar el desarrollo con una serie de pasos (como se establece en una demostración) se llega a una contradicción (**a un absurdo**) por lo que se concluye que el punto de partida –*la negación de la proposición*- es falsa y en consecuencia la proposición original es verdadera.

- La demostración por reducción al absurdo se sustenta en dos **principios de la lógica clásica,** el principio del tercero excluido y el principio de no contradicción.
- **El axioma del tercero excluido** afirma que dada una proposición ésta es verdadera o su negación lo es, no puede ocurrir que ninguna sea verdadera (éste es el caso que se excluye)
- **El principio de no contradicción** que afirma que no es posible que una proposición y su negación sean ambas verdaderas.
- En el siguiente esquema se ilustra una demostración por reducción al absurdo

Se quiere probar P

Se parte de "no P"

no P

¡absurdo!

Como "no P" nos llevó a un absurdo concluímos que la proposición "no P" es errónea, por lo que "P" tiene que ser verdadera.

La negación de la condicional

"Si P entonces Q"

es

"P y no Q"

Figura 2.2

Solución:

La negación de
"Si $x \in \varnothing$ entonces $x \in \{a,e,o\}$"
es
"$x \in \varnothing$ y $x \notin \{a,e,o\}$"

Respuesta correcta: B)

3.2 El paso (2) se infiere del paso (1) y el modo de inferencia en el que se basa es:

A) De la parte a la disyunción
B) De la conjunción a la parte
C) De lo general a la particular
D) De lo específico a lo inespecífico

El modo de inferencia lógico **de la conjunción a la parte** es de la forma:
"Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ entonces $\mathcal{P}$"

- Si $\mathcal{P}$ fuera verdadera, la condicional *"Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ entonces $\mathcal{P}$"* sería verdadera por tener tesis verdadera.
- Si $\mathcal{P}$ fuera falsa, la conjunción *"$\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$"* sería falsa por tener una componente falsa*, y entonces la condicional "Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ entonces $\mathcal{P}$"* sería verdadera por tener hipótesis falsa"
- Cualquiera que sea el caso *"Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ entonces $\mathcal{P}$"* es verdadera, es decir es una tautología.

La hipótesis es una conjunción y la tesis es una componente de la conjunción.

Solución:

La **inferencia** de (1) a (2) es
"Si $x \in \varnothing$ y $x \notin \{a,e,o\}$ entonces $x \in \varnothing$"
La cual es válida por el modo de inferencia de la conjunción a la parte.

Respuesta correcta: B)

3.3 El paso (3) se infiere del paso (2) y el modo de inferencia en el que se basa es:

A) De la parte a la disyunción
B) De la conjunción a la parte
C) De lo general a lo particular
D) De lo específico a lo inespecífico

En lo que sigue $\mathcal{P}$ representa una propiedad y $\mathcal{P}(w)$ significa que w tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

El modo de inferencia de **lo específico a lo inespecífico** es de la forma: "*Si* $\mathcal{P}(x)$ *entonces existe* z *tal que* $\mathcal{P}(z)$"

La hipótesis afirma que x tiene la propiedad **P** y la tesis sólo afirma que hay algún elemento que tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Solución:

La inferencia de (2) a (3) es:

"Si $x \in \varnothing$ entonces existe z tal que $z \in \varnothing$"

En la hipótesis se especifica que x pertenece al vacío y la tesis no se especifica, sólo afirma que hay algún elemento que pertenece al vacío.

Así que el modo de inferencia que se uso fue *de lo específico a lo inespecífico*

Respuesta correcta: D)

3.4 El símbolo $\underset{0}{\nabla}$, se escribe cuando

A) La demostración terminó
B) Terminó una parte de la demostración
C) Se llega a una contradicción
D) La proposición que estamos demostrando es falsa

Es costumbre en matemáticas, en las demostraciones por reducción al absurdo, escribir un **símbolo de admiración estilizado** cuando se llega a una **contradicción (a un absurdo).** Por ejemplo *"*$\mathcal{P}$ *y no* $\mathcal{P}$*"*

- Uno de los axiomas de la lógica clásica es **el principio de no contradicción** que afirma que no es posible que una proposición y su negación sean ambas verdaderas.

Solución:

En este caso la proposición en el paso (5) es

"Existe z tal que $z \in \varnothing$, y no existe z tal que $z \in \varnothing$"

Ésta es de la forma:
"$\mathcal{P}$ y no $\mathcal{P}$"
la cual es una contradicción.

Por esta razón, a continuación del paso (5) se escribió el símbolo de admiración.

Respuesta correcta: C)

Situación 4. Demostración por inducción.

Definimos:
Para todo $n \in \mathbb{N},\ S_n := 1 + 2 + ... + n$.
Para todo $n \in \mathbb{N},\ T_n := 1^3 + 2^3 + ... + n^3$.

La siguiente es una demostración de que:

Para todo $n \in \mathbb{N},\ T_n = S_n{}^2$

Demostración por inducción
(I) $T_1 = S_1{}^2$

Prueba:

Por una parte
$T_1 = 1^3 = 1 \Rightarrow \boxed{T_1 = 1}\ .\ .\ .\ (\alpha)$

Y por otra
$S_1 = 1 \Rightarrow S_1{}^2 = 1^2 \Rightarrow \boxed{S_1{}^2 = 1}\ .\ .\ .\ (\beta)$
De (α) y (β) $T_1 = S_1{}^2$

(II) Para todo $k \in \mathbb{N}$, si $T_k = S_k{}^2$ entonces $T_{k+1} = S^2{}_{k+1}$

Prueba

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $T_k = S_k{}^2$

$$T_{k+1} = 1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = T_k + (k+1)^3 \overset{(HI)}{=} S_k{}^2 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 =$$
$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{\left[k^2 + 4(k+1)\right](k+1)^2}{4} =$$
$$\frac{(k^2 + 4k + 4)(k+1)^2}{4} = \frac{(k+2)^2(k+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+1+1)^2}{2^2} = \left(\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}\right)^2 = S_{k+1}{}^2.$$

Por tanto $T_{k+1} = S_{k+1}{}^2$.

(III) De (I) y (II), por el principio de inducción, concluimos que

Para todo $n \in \mathbb{N},\ T_n = S_n{}^2$

4.1 En la demostración anterior la base de inducción es

A) $T_1 = 1$

B) $T_1 = 1^3$

C) $T_1 = S_1^{\ 2}$

D) $T_1 = 1^2$

El principio de inducción dice:

"**Si**

1 tiene la propiedad $\mathcal{P}$

y

todo número natural cumple con que, si él tiene la propiedad $\mathcal{P}$ entonces **su** sucesor también tiene la propiedad $\mathcal{P}$

entonces

todo número natural tiene la propiedad $\mathcal{P}$"

Esta proposición es una condicional cuya hipótesis es una conjunción, y a la primera componente de la conjunción se le llama base de inducción.

El lenguaje simbólico ayuda a ver la forma del Principio de Inducción (en la tabla de abajo, la expresión $\mathcal{P}(m)$ significa que m tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

$\{ \mathcal{P}(1) \wedge [\ \forall k \in \mathbb{N}\ (\ \mathcal{P}(\mathrm{k}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathrm{k+1})\ )\ ]\ \} \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ (\ \mathcal{P}(n))$	Principio de inducción
$\mathcal{P}(1)$	Base de inducción

Solución:

En este ejemplo, que m tenga la propiedad significa que $T_m = S_m^{\ 2}$, luego, que el número 1 tenga la propiedad significa que $T_1 = S_1^{\ 2}$.

Respuesta correcta: C)

4.2 En la demostración anterior la hipótesis de inducción es

A) $T_k = S_k^{\ 2}$

B) $k \in \mathbb{N}$, y $T_k = S_k^{\ 2}$

C) $T_1 = S_1^{\ 2}$

D) $k+1 \in \mathbb{N}$ y $T_{k+1} = S_{k+1}^{\ 2}$

El **principio de inducción** es una condicional cuya hipótesis es una conjunción, y la segunda componente de la conjunción es una cuantificación universal cuyo cuantificando es una condicional, a la hipótesis de ésta se le llama hipótesis de inducción.

En lo que sigue $\mathcal{P}$ representa una propiedad y $\mathcal{P}(m)$ significa que m tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

$\{\mathcal{P}(1) \wedge [\forall k \in \mathbb{N}\ (\mathcal{P}(\mathrm{k}) \to \mathcal{P}(\mathrm{k+1}))]\} \to \forall n \in \mathbb{N}\ (\mathcal{P}(n))$	Principio de inducción
$\mathcal{P}(\mathrm{k}) \to \mathcal{P}(\mathrm{k+1})$	Paso inductivo (es una condicional)
$\mathcal{P}(\mathrm{k})$	Hipótesis de inducción

Solución:

$\{T_1 = S_1{}^2 \wedge [\forall k \in \mathbb{N}\ (T_k = S_k{}^2 \to T_{k+1} = S_{k+1}{}^2)]\} \to \forall n \in \mathbb{N}(T_n = S_n{}^2)$	Principio de inducción
$T_k = S_k{}^2 \to T_{k+1} = S_{k+1}{}^2$	Paso inductivo (es una condicional)
$T_k = S_k{}^2$	Hipótesis de inducción

Respuesta correcta: A)

4.3 El valor de T_{100} es

A) $2^2 5^4 101^2$

B) $3^2 17^2 101^2$

C) $2^2 3^4 5^4 11^2$

D) $2^4 3^2 5^4 11^2$

En la tabla que sigue $\mathcal{P}$ representa una propiedad y $\mathcal{P}(m)$ significa que m tiene la propiedad $\mathcal{P}$

$\{\ \mathcal{P}(1) \wedge [\ \forall k \in \mathbb{N}\ (\ \mathcal{P}(\mathrm{k}) \to \mathcal{P}(\mathrm{k}+1)\ )\ ]\} \to \forall n \in \mathbb{N}(\ \mathcal{P}(n))$	Principio de inducción
$\forall n \in \mathbb{N}(\ \mathcal{P}(n))$	Conclusión

La conclusión del principio de inducción nos dice que todo número natural tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Una anécdota sobre el matemático Gauss (Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), asegura que siendo Gauss un niño dedujo una forma para contar rápidamente la suma de los primeros n naturales. Esta deducción da lugar a la fórmula $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, la cual también puede demostrarse por inducción.

Solución:

En este ejemplo que m tenga la propiedad significa que $T_m = S_m{}^2$, y la conclusión nos dice que todo número natural n tiene la propiedad, esto es: "para todo n en $\mathbb{N}$, $T_n = S_n{}^2$; en particular el número 100 tiene la propiedad, es decir $T_{100} = S_{100}{}^2$.

Ahora

$$T_{100} = S_{100}{}^2 = \left[\frac{100(100+1)}{2}\right]^2 = (50(101))^2 = \left(2(5)^2 101\right)^2 = 2^2 5^4 101^2$$

Por tanto $T_{100} = 2^2 5^4 101^2$

Respuesta correcta: A)

4.4 El valor de $T_{1000} - T_{999}$ es igual a

A) $2^3 5^3$

B) $2^6 5^6$

C) $2^9 5^9$

D) $2^{12} 3^{12}$

$$T_k = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3$$
$$T_{k+1} = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3$$
$$T_{k+1} - T_k = (k+1)^3$$

Solución:

$$T_{999} = 1^3 + 2^3 + \ldots + 999^3$$
$$T_{1000} = 1^3 + 2^3 + \ldots + 999^3 + 1000^3$$

Por tanto $T_{1000} - T_{999} = 1000^3$

$$T_{1000} - T_{999} = 1000^3 = \left(10^3\right)^3 = 10^9 = \left[2(5)\right]^9 = 2^9 5^9$$

Respuesta correcta: C)

AUTOEVALUACIÓN

Situación 5. Demostración por el método de Reducción al absurdo.

La siguiente es una demostración de que:

Para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\frac{1}{x} \neq 0$

Demostración por reducción al absurdo

(1) ----------	Negación
(2) $x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $\frac{1}{x_0} = 0$	Definición de x_0, basada en (1)
(3) $\frac{1}{x_0} = 0$	------------ -----------
(4) $x_0\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0 0$	(3) Por sustitución (axioma de la igualdad)
∇_0 (5) 1=0	(4) Propiedades de campo de los números reales

Como a partir de la negación de la proposición: "Para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\frac{1}{x} \neq 0$", se llega a un **absurdo**, concluimos que dicha negación es falsa y por tanto "Para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\frac{1}{x} \neq 0$" es verdadera.

5.1 El primer paso de la demostración es:

A) Para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\frac{1}{x} = 0$

B) Para todo $x \notin \mathbb{R} - \{0\}$, $\frac{1}{x} = 0$

C) Existe $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $\frac{1}{x} = 0$

D) Existe $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $\frac{1}{x} \neq 0$

5.2 La justificación del paso (3) es:

A) (2) De la parte a la disyunción
B) (2) De la conjunción a la parte
C) (2) De la disyunción a la parte
D) (2) De parte a la conjunción

5.3 La inferencia del paso (3) al paso (4) es:

A) $\frac{1}{x_0} = 0$ ó $x_0\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0 0$

B) $\frac{1}{x_0} = 0$ y $x_0\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0 0$

C) Si $x_0\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0 0$ entonces $\frac{1}{x_0} = 0$

D) Si $\frac{1}{x_0} = 0$ entonces $x_0\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0 0$

5.4 La inferencia que es válida por su forma es:

A) De (1) a (2)
B) De (2) a (3)
C) De (3) a (4)
D) De (4) a (5)

Situación 6. Demostración por inducción.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$

La siguiente es una demostración de que:

Para todo $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, f_n es derivable y $f_n' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = nx^{n-1}$

Demostración por inducción
(I) f_2 es derivable y $f_2' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f_2'(x) = 2x^{2-1}$

Prueba

Sea $x \in \mathbb{R}$.

Por una parte, si $h \neq 0$

$$\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$$

Como $\lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$, $\lim_{h\to 0}\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h} = 2x$, es decir f_2 es derivable en x y $f_2'(x) = 2x$.

Como x fue elegido arbitrariamente en $\mathbb{R}$, se concluye que:

Para todo $x \in \mathbb{R}$, f_2 es derivable en x y $f_2'(x) = 2x^2$.

Por tanto f_2 es derivable y $f_2' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2'(x) = 2x^2\ .\ .\ .\ (\alpha)$

Potra parte

Para todo $x \in \mathbb{R},\ 2x^{2-1} = 2x .\ .\ .\ (\beta)$

De (α) y (β) f_2 es derivable y $f_2' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2'(x) = 2x^{2-1}$

(II) Para todo $k \in \mathbb{N} - \{1\}$, si f_k es derivable y $f_k' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_k'(x) = kx^{k-1}$ entonces f_{k+1} es derivable y $f_{k+1}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_{k+1}'(x) = (k+1)x^{k+1-1}$

Prueba

Sea $k \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Supongamos que f_k es derivable y $f_k' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_k'(x) = kx^{k-1}$.

Observemos que si $x \in \mathbb{R}$

$f_{k+1}(x) = x^{k+1} = xx^k = f_1(x) f_k(x) = (f_1 f_k)(x)$, es decir $f_{k+1}(x) = (f_1 f_k)(x)$

Por tanto para todo $x \in \mathbb{R}$, $f_{k+1}(x) = (f_1 f_k)(x)$

O bien $f_{k+1} = f_1 f_k$

Por el teorema de la derivada de un producto sabemos que:

f_{k+1} es derivable. (γ)

y que $f_{k+1}' = f_1' f_k + f_1 f_k'$

Otro resultado conocido es que f_1 es derivable y que $f_1' = 1$.

De estos dos últimos renglones concluimos que $f_{k+1}' = f_k + f_1 f_k'$

Entonces $f_{k+1}'(x) = f_k(x) + f_1(x) f_k'(x)$

Y por hipótesis de inducción $f_k'(x) = kx^{k-1}$

De las dos últimas igualdades y las definiciones de f_1 y f_k tenemos

$f_{k+1}'(x) = x^k + x\left(kx^{k-1}\right) \Rightarrow f_{k+1}'(x) = (k+1)x^k$

Por tanto $f_{k+1}'(x) = (k+1)x^{k+1-1}$

Como x fue elegida arbitrariamente en $\mathbb{R}$, se concluye que:

Para todo x en $\mathbb{R}$, $f_{k+1}'(x) = (k+1)x^{k+1-1}$

Es decir $f_{k+1}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{k+1}'(x) = (k+1)x^{k+1-1}$ . . . (δ)

De (γ) y (δ)

f_{k+1} es derivable y $f_{k+1}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(III) De (I) y (II), por el principio de inducción, se concluye que ------------

6.1 En la demostración anterior la base de inducción es:

A) f_0 es derivable y $f_0' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_0'(x) = 0$

B) f_1 es derivable y $f_1' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1'(x) = 1$

C) f_1 es derivable y $f_1' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1'(x) = 1x^{1-1}$

D) f_2 es derivable $f_2' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2'(x) = 2x^{2-1}$

6.2 En la demostración anterior la hipótesis de inducción es:

A) f_k es derivable y $f_k'(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_k'(x) = kx^{k-1}$

B) f_{k+1} es derivable y $f_{k+1}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_{k+1}'(x) = \left(k+1\right) x^{k+1-1}$

C) $k \in \mathbb{N}$ y f_k es derivable y $f_k'(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_k'(x) = kx^{k-1}$

D) $k \in \mathbb{N} - \{1\},\ f_k$ es derivable y $f_k'(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f_k'(x) = kx^{k-1}$

6.3 La conclusión que se ha omitido es:

A) Para todo $n \in \mathbb{N},\quad f_n$ es derivable y $f_n' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f_n'(x) = nx^{n-1}$

B) Para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\},\ f_n$ es derivable y $f_n' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f_n'(x) = nx^{n-1}$

C) Para todo $n \in \mathbb{N} - \{1\},\ f_n$ es derivable y $f_n' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f_n'(x) = nx^{n-1}$

D) Para todo $n \in \mathbb{N} - \{2\},\ f_n$ es derivable y $f_n' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f_n'(x) = nx^{n-1}$

6.4 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es cierta?

A) Para todo $x \in \mathbb{R},\quad f_1'\left(x\right) = 1x^{1-1}$

B) Para todo $x \in \mathbb{R},\quad f_2'\left(x\right) = 2x^{2-1}$

C) Para todo $x \in \mathbb{R},\quad f_3'\left(x\right) = 3x^{3-1}$

D) Para todo $x \in \mathbb{R},\quad f_4'\left(x\right) = 4x^{4-1}$

MESOGRAFÍA

Zubieta, G. (2002). *Lógica deductiva.* [En línea] México: Sociedad Matemática Mexicana. Disponible en http://www.pesmm.org.mx/Serie%20Textos_archivos/T1.pdf

BIBLIOGRAFÍA

Zubieta, G. (1999). *Manual de Lógica para Estudiantes de Matemáticas.* México, Trillas.

Zubieta, G. (1992). *Taller de Lógica Matemática.* Análisis Lógico. México: McGraw-Hill.

UNIDAD 4. ANÁLISIS COMBINATORIO Y TEOREMA DEL BINOMIO DE NEWTON

Objetivos específicos

El alumno:

- Desarrollará habilidades de pensamiento numérico y abstracto, a través del planteamiento y solución de problemas del cálculo combinatorio y de aproximación por medio de la serie del binomio, con el fin de adoptar una postura crítica para la toma de decisiones.

- Desarrollará su creatividad al proponer la solución de problemas y reconocerá que es posible llegar su solución por un camino diferente al que él haya encontrado, al escuchar y analizar los planteamientos de otros.

Situación 1. Cena de fin de año.

El sindicato de profesores de una escuela ofrece una cena-baile de fin de año para sus afiliados donde habrá una rifa de una tableta, una laptop y una smart tv (en ese orden). En total asisten 145 profesores, cinco de los cuales son representantes del sindicato.

1.1 Si ningún profesor puede ganar más de un premio, ¿de cuántas formas se puede elegir a los ganadores de la rifa?

A) $145\times144\times143$
B) $\dfrac{140\times139\times138}{3!}$
C) $140\times139\times138$
D) $\dfrac{145\times144\times143}{3!}$

El número de **ordenaciones sin repetición** de los elementos de un conjunto de cardinal n tomadas de r en r es $nPr = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$. Otros símbolos usados para denotar este número son ${}_nP_r$ ó O_r^n.
En particular, el número de **permutaciones** de los elementos de un conjunto de cardinal n es $P_n = n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$.

Solución:

Son todas las posibles ordenaciones sin repetición del conjunto de los 145 profesores asistentes tomados de tres en tres, es decir $145P3 = 145 \times 144 \times 143$, porque $n - r + 1 = 145 - 3 + 1 = 143$.

Respuesta correcta: A)

1.2 Si los representantes del sindicato no participan en el sorteo de los premios, y nadie puede obtener más de un premio ¿de cuántas maneras se puede elegir a los ganadores de la rifa?

A) 2985840
B) 895160
C) 2685480
D) 497640

Solución:

Descartando a los cinco representantes del sindicato, todas las posibles ordenaciones sin repetición tomadas de tres en tres del conjunto de los 140 profesores asistentes restantes es $140P3 = 140 \times 139 \times 138 = 2685480$.

Respuesta correcta: C)

1.3 ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de tres integrantes para organizar y efectuar la rifa que incluya a lo sumo un representante del sindicato?

A) 2685480
B) 497640
C) 447580
D) 496230

Las **combinaciones** de un conjunto A de n elementos tomadas de r en r son todos los subconjuntos de A con r-elementos, su número se denota con nCr ó C_n^r, ó con $\binom{n}{r}$ y se cumple

$$\binom{n}{r} = \frac{nPr}{r!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)}{r!}, \text{ ó}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Principio fundamental de conteo: Si una tarea se puede realizar de n maneras y otra se puede realizar de m, ambas se pueden realizar de $n \times m$ maneras distintas.

Solución:

Hay $\binom{140}{3} = \frac{140!}{3!(137)!} = 447580$ posibles comités sin ningún elemento del sindicato pues éstos son todos los posibles subconjuntos de tres elementos tomados de un conjunto de 140 personas que no son representantes del sindicato.

Para formar comités de tres integrantes que contengan un solo elemento del sindicato tomamos subconjuntos de dos elementos de las 140 personas que no son representantes del sindicato, de los cuales hay

$$\binom{140}{2} = \frac{140!}{2!(138)!} = 9730,$$

después elegimos un elemento del sindicato, lo cual se puede realizar de $\binom{5}{1} = 5$ maneras, y por el principio fundamental del conteo, se sigue que el número total de comités de tres integrantes con solo un representante del sindicato es

$$\binom{5}{1} \times \binom{140}{2} = 5 \times 9730 = 48650.$$

Entonces el total de los comités posibles de tres miembros con a lo más un representante del sindicato es la suma de los casos anteriores:

$$\binom{140}{3} + \binom{5}{1} \times \binom{140}{2} = 447580 + 48650 = 496230.$$

Respuesta correcta: D)

1.4 De cuántas maneras se puede elegir un comité de cuatro miembros para hacer la rifa de la fiesta, si debe contener exactamente dos representantes del sindicato y dos del resto de los profesores asistentes.

A) 97300
B) 10
C) 9730
D) 2237900

Solución:

Hay $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(3)!} = 10$ formas de elegir a dos de los cinco representantes del sindicato, mientras que la elección de dos personas de los profesores que no son representantes del sindicato se puede realizar de

$$\binom{140}{2} = \frac{140!}{2!(138)!} = 9730 \text{ maneras,}$$

entonces por el principio fundamental de conteo, el total de maneras posibles de formar los comités con cuatro integrantes solicitados es

$$\binom{5}{2} \times \binom{140}{2} = 10 \times 9730 = 97300 .$$

Respuesta correcta: A)

Situación 2. La final de un concurso.

En un examen final de un concurso interpreparatoriano de conocimientos se debe asignar un pupitre a cuatro concursantes de la prueba de Cálculo y a cuatro estudiantes de Temas Selectos de Matemáticas (TSM). Se dispone de ocho pupitres en una fila para acomodarlos.

2.1 ¿De cuántas formas se pueden sentar los ocho concursantes?

A) $8 \times 4!$
B) $4! + 4!$
C) $8!$
D) $2 \times 8!$

Solución:

Son todas las posibles permutaciones de los ocho alumnos, cuyo número es $P_8 = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$

Respuesta correcta: C)

2.2 Si los estudiantes se sientan de manera alternada, uno de Cálculo y otro de TSM, y la primera posición la ocupa uno de TSM ¿De cuántas maneras se pueden sentar?

A) 1152
B) 48
C) 576
D) 5040

Solución:

Por el principio fundamental de conteo son $4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$, maneras porque se inicia el acomodo con estudiantes de Temas Selectos y después, alternándolos, se acomoda a los estudiantes de Cálculo.

Respuesta correcta: C)

2.3 ¿Cuántos acomodos son posibles si no deben estar juntos dos alumnos de la misma materia?

A) 1152
B) 48
C) 576
D) 24

Solución:

Se puede acomodar primero a los estudiantes de Temas Selectos en forma alternada de tal manera que ocupen la primera silla, la tercera, la quinta y la séptima y luego acomodar a los de Cálculo alternando lugares, por el principio fundamental de conteo hay $4! \times 4!$ formas; pero también se debe considerar el número de formas obtenidas al acomodar primero a los alumnos de Cálculo que también son $4! \times 4!$, entonces en total son $2 \times 4! \times 4! = 1152$ formas.

Respuesta correcta: A)

2.4 Si tres de los concursantes son mujeres y los cinco restantes son hombres y deben sentarse juntas las mujeres ya sea al inicio de la fila o al final, ¿de cuántas maneras se puede hacer el acomodo?

A) 720
B) 1440
C) 576
D) 1152

Solución:

Si se inicia con las mujeres se tienen $3\times2\times1=3!$ maneras de acomodarlas y para los cinco hombres disponemos de los últimos cinco asientos, por lo tanto el número de formas de acomodar a los hombres es $5!$, pero también se puede iniciar el acomodo sentando primero el bloque de hombres, entonces por el principio fundamental de conteo, el número total de maneras buscado es $2\times3!\times5!=1440$.

Respuesta correcta: B)

Situación 3. Expansión binomial.

Considera el binomio $(a+b)^{12}$.

3.1 ¿Cuál es el quinto término de su expansión?

A) $495a^4b^8$
B) $495a^8b^4$
C) $792a^5b^7$
D) $792a^7b^5$

Teorema del binomio de Newton.
Para cualquier entero no negativo n, se cumple el siguiente desarrollo o expansión

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

donde $\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

Término r-ésimo del desarrollo del binomio de Newton:
El término que ocupa la posición r ó el r-ésimo término en la expansión de un binomio $(a+b)^n$ es

$$\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}.$$

Solución:

En el desarrollo del binomio $(a+b)^{12}$, el término que ocupa la posición r es $\binom{12}{r-1}a^{12-r+1}b^{r-1}$, y puesto que se busca el término que ocupa la quinta posición, se tiene la condición $r=5$, al sustituir este valor se obtiene el término deseado $\binom{12}{5-1}a^{12-5+1}b^{5-1}=\binom{12}{4}a^{12-4}b^4=\frac{12!}{4!(12-4)!}a^8b^4=495a^8b^4$.

Respuesta correcta: B)

3.2 El término que ocupa la posición central en la expansión del binomio es

A) $792a^6b^6$
B) $924a^7b^5$
C) $792a^7b^5$
D) $924a^6b^6$

Solución:

En el desarrollo del binomio $(a+b)^{12}$, aparecen 13 términos por lo que el término central es el séptimo y ocurre con $r=7$, por tanto, al usar el modelo $\binom{n}{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}$ para el término que ocupa la posición r con $n=12$ se obtiene la respuesta

$$\binom{12}{7-1}a^{12-7+1}b^6=\binom{12}{6}a^{12-6}b^6=\frac{12!}{6!(12-6)!}a^6b^6=\frac{12!}{6!6!}a^6b^6=924a^6b^6.$$

Respuesta correcta D)

3.3 Si $a=1$ y $b=-2x$ ¿cuál es el coeficiente de x^7 en la expansión?

A) $101376x^7$
B) $-792x^7$
C) $-101376x^7$
D) $-792x^7$

Solución:

Con $a=1,$ y $b=-2x$, el binomio se convierte en $(a+b)^{12}=\left(1+(-2x)\right)^{12}$

y el término r -ésimo de su expansión como binomio de Newton es

$$\binom{12}{r-1}(1)^{12-r+1}(-2x)^{r-1}=\binom{12}{r-1}(-2)^{r-1}x^{r-1},$$

en el cual se sustituye $r-1=7$ para obtener el término solicitado

$$\binom{12}{7}(-2)^7x^7=792(-128)x^7=-101376x^7,$$

además de $r-1=7$ se deduce que $r=8$ por lo que el término encontrado es el octavo en orden de potencias crecientes de x.

Respuesta correcta: C)

3.4 Si $a=t,$ y $b=-\dfrac{1}{2t}$, ¿cuál es el término constante en la expansión del binomio?

A) $-\dfrac{231}{16}$
B) 924
C) –924
D) $\dfrac{231}{16}$

Solución.

Con $a=t,$ $b=-\dfrac{1}{2t}$, el binomio se convierte en

$$(a+b)^{12}=\left(t+\left(-\frac{1}{2t}\right)\right)^{12}=\left(t+(-2t)^{-1}\right)^{12}=\left(t+(-2)^{-1}t^{-1}\right)^{12}$$

cuyo término r es igual a

$$\binom{12}{r-1} t^{12-r+1}\left((-2)^{-1} t^{-1}\right)^{r-1} = \binom{12}{r-1} t^{13-r} (-2)^{-(r-1)} t^{-(r-1)} =$$

$$(-2)^{-(r-1)} \binom{12}{r-1} t^{13-r} t^{-r+1} = (-2)^{-(r-1)} \binom{12}{r-1} t^{14-2r}$$

en donde se observa que el término constante ocurre cuando se satisface la ecuación $14-2r=0$, cuya solución es $r=7$; al sustituir este valor en la última expresión, se tiene el término

$$(-2)^{-(7-1)} \binom{12}{7-1} t^{14-2(7)} = (-2)^{-6} \binom{12}{6} t^0 = \frac{1}{(-2)^6} \times \binom{12}{6} = \frac{1}{(-2)^6} \times \frac{12!}{6!6!} = \frac{1}{64} \times 924 = \frac{231}{16}.$$

Respuesta correcta D)

AUTOEVALUACIÓN.

Situación 4. Torneo de billar.

En el Palacio de los deportes de Ciudad de México se lleva a cabo un encuentro de 30 jugadores de billar. Hay billaristas veteranos y jóvenes de 30 años o menos, y todos son adultos excepto Juan que es un habilidoso joven de 17 años.

4.1 Si en la reunión de inauguración todos los billaristas, excepto Juan, se saludan con un beso en una mejilla ¿cuántos besos ocurrieron?

A) 870
B) 812
C) 435
D) 406

4.2 Antes de que inicie la primera ronda del torneo para quitarse los nervios, Juan forma filas (al colocar una bola tras otra) con cinco bolas rojas y cuatro bolas blancas de billar, ¿en total cuántas filas distintas podría formar?

A) 2880
B) 126
C) 252
D) 1440

4.3 Suponiendo que en la penúltima ronda sólo quedan quince billaristas y hay disponibles tres jueces incluyendo al juez principal ¿de cuántas maneras se pueden repartir los jueces a los jugadores si primero elige el juez principal y cada juez debe calificar a cinco jugadores?

A) 756756
B) 378378
C) 1513512
D) 126126

4.4 Si en la última ronda hay nueve finalistas con distinta cantidad de puntos obtenidos e inicia el billarista que tiene el mayor puntaje, luego los que le siguen en orden decreciente de puntos y todos deben ejecutar una de cuatro posibles jugadas ante el juez principal, ¿de cuántas formas se podría realizar la última ronda?

A) 3024
B) 262144
C) 6561
D) 364880

4.5 Suponiendo que en la última ronda quedan ocho jugadores veteranos y siete jóvenes jugadores (menores de treinta años), y un juez debe asignar los tres primeros lugares de una de estas dos categorías ¿de cuántas maneras puede hacer la asignación?

A) 455
B) 210
C) 546
D) 336

BIBLIOGRAFÍA

Cárdenas, H., LLuis, E., Raggi, F. & Tomás, F. (2007). *Álgebra Superior*. México: Trillas.

De Oteyza, E. et al. (2016). *Temas Selectos de Matemáticas.* México: Pearson Educación.

Epp, S. (2012). *Matemáticas discretas con aplicaciones.* México: Cengage Learning.

Jiri, M., Jaroslav N. (2008). *Invitación a la matemática discreta.* Barcelona: Reverté.

Micha, E., (1999). *Matemáticas discretas.* México: Editorial Limusa.

Pérez, M. (2013). *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas México: Instituto de Matemáticas, UNAM.

MESOGRAFÍA

Para ver notas sobre el teorema de Newton y combinatoria
https://www.vitutor.com/pro/1/a_11.html

recuperada el 6 de abril de 2019.

UNIDAD 5. NÚMEROS COMPLEJOS

Objetivos específicos

El alumno:

- Analizará la relación existente entre las representaciones algebraicas y geométricas de los números complejos, a través del uso de recursos tradicionales o tecnológicos, con el fin de plantear conjeturas y construir nuevos conocimientos.

Situación 1. Operaciones básicas con números complejos.

1.1 Simplificar la siguiente suma de complejos $\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{8}}{3}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{32}}{3}i\right)$,

expresando el resultado en el formato binomial

A) $-1-2\sqrt{2}i$
B) $-1+2\sqrt{2}i$
C) $1+2\sqrt{2}i$
D) $1-2\sqrt{2}i$

Por definición "i" es un número con la propiedad $i^2=-1$, se puede notar que $i\notin\mathbb{R}$.
La forma binomial de un número complejo es $z=a+ib$, para algunos a y b en $\mathbb{R}$.
Se denota al conjunto de todos los números complejos por $\mathbb{C}=\{a+bi\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$

Operaciones en los números complejos

Suma
Si $z_1=a_1+ib_1$ y $z_2=a_2+ib_2$ están en $\mathbb{C}$, se define $z_1+z_2:=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$
Interpretación geométrica de la suma de los números complejos (ver Figura 5.1).

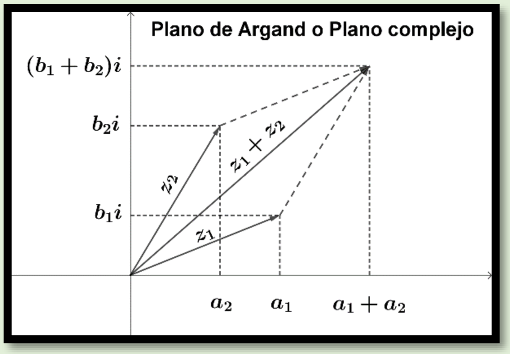


Figura 5.1

Axiomas para la suma

Para todo z_1, z_2 y z_3 en $\mathbb{C}$, se tiene

S1) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

S2) $z_1+z_2=z_2+z_1$

S3) El $0=0+0i$ en $\mathbb{C}$ cumple $z_1+0=z_1$

S4) Si $z=a+ib\in\mathbb{C}$ entonces $z+(-z)=0$, donde $-z=-a-ib$.

Producto

Se define $z_1\cdot z_2:=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$.

Axiomas para el producto

Para toda z_1, z_2 y z_3 en $\mathbb{C}$, se tiene

P1) $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$

P2) $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$

P3) $1=1+0i$ en $\mathbb{C}$ cumple $1\cdot z_1=z_1$

P4) Si $z=a+ib\in\mathbb{C}-\{0\}$, se tiene que existe z^{-1} en $\mathbb{C}$ tal que $z\cdot z^{-1}=1$

D) Se tiene la propiedad distributiva: $(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3$.

Puesto que $\mathbb{C}$ cumple los axiomas anteriores, $\mathbb{C}$ es un campo.

Solución:

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{8}}{3}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{32}}{3}i\right)=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{8}}{3}+\frac{\sqrt{32}}{3}\right)i=1+\frac{2\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{3}i=1+2\sqrt{2}i$$

Respuesta correcta: C)

1.2 El producto $(1+2i)\left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)$ expresado en forma binomial es:

A) $\frac{11}{25}+\frac{2}{25}i$

B) $\frac{11}{25}-\frac{2}{25}i$

C) $-\frac{11}{25}+\frac{2}{25}i$

D) $-\frac{11}{25}-\frac{2}{25}i$

Solución:

$$(1+2i)\left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)=\left(1\cdot\frac{3}{25}-2\cdot\frac{4}{25}i^2\right)+\left[1\cdot\left(-\frac{4}{25}\right)+2\left(\frac{3}{25}\right)\right]i$$
$$=\left(\frac{3}{25}+\frac{8}{25}\right)+\left(-\frac{4}{25}+\frac{6}{25}\right)i=\frac{11}{25}+\frac{2}{25}i$$

Respuesta correcta: A)

1.3 La división de $\frac{1+2i}{3+4i}$ expresada en forma binomial es:

A) $\frac{11}{25}-\frac{2}{25}i$

B) $\frac{11}{25}+\frac{2}{25}i$

C) $-\frac{11}{25}+\frac{2}{25}i$

D) $-\frac{11}{25}-\frac{2}{25}i$

El complejo $a-ib$ es el conjugado de $z=a+ib$, y se denota por $\bar{z}$, es decir $\bar{z}=a-ib$ (ver Figura 5.2).

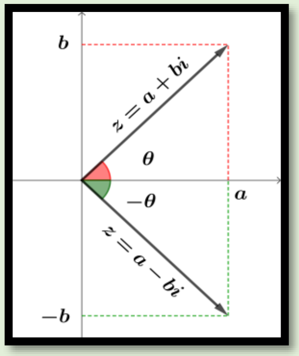


Figura 5. 1

Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ la magnitud o módulo de z es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ el argumento de z es $arg(z) = \begin{cases} arctan\left(\frac{b}{a}\right) \text{ ó } tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \text{ si } a \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ si } a = 0 \text{ y } b > 0 \\ \frac{3\pi}{2} \text{ si } a = 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$

Si $\theta = arg(z)$ se tiene $\begin{cases} a = |z|cos\,\theta = |z|cos(\theta) = \text{Re}(z) \\ b = |z|sen\theta = |z|sen(\theta) = \text{Im}(z) \end{cases}$ (ver Figura 5.3).

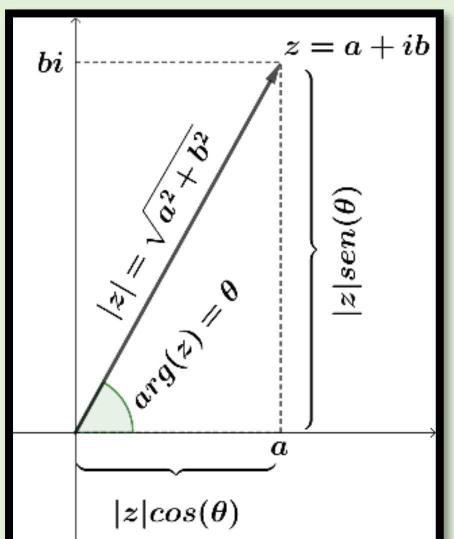


Figura 5. 3

Forma trigonométrica o **polar de un número complejo**

$$z = a + ib = |z|(cos(\theta) + isen(\theta)) = |z| cis(\theta) = |z| e^{i\theta} \quad \text{donde} \begin{cases} \theta = arg(z) \\ |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Fórmula de Moivre

Si $z = |z|(cos(\theta) + isen(\theta))$ entonces $z^n = |z|^n (cos(n\theta) + isen(n\theta))$

Interpretación geométrica del producto de números complejos (ver Figura 5.4).

Si $z_1 = |z_1|(cos\,\theta_1 + isen\theta_1)$ y $z_2 = |z_2|(cos\,\theta_2 + isen\theta_2)$ son dos números complejos, en forma polar, el producto es $z_1 \cdot z_2 := |z_1||z_2|(cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2))$

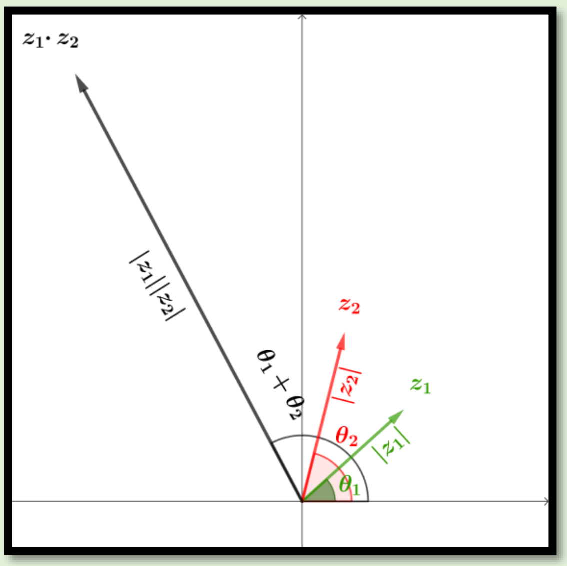


Figura 5. 2

Para efectuar la división entre números complejos es conveniente expresar el inverso de z en la forma $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$, es decir $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, ya que se puede escribir la división de números complejos como $\frac{w}{z} = w \cdot z^{-1} = w \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$

Solución:

$$\frac{1+2i}{3+4i} = (1+2i)\left(\frac{1}{3+4i}\right) = (1+2i)\left(\frac{3-4i}{9+16}\right) = (1+2i)\left(\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\right) = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$$

Respuesta correcta: B)

1.4 Una de las raíces cuartas de $-i$ es:

A) $cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)+isen\left(\frac{5}{8}\pi\right)$

B) $cos\left(\frac{7}{8}\pi\right)+isen\left(\frac{7}{8}\pi\right)$

C) $cos\left(\frac{9}{8}\pi\right)+isen\left(\frac{9}{8}\pi\right)$

D) $cos\left(\frac{1}{8}\pi\right)+isen\left(\frac{1}{8}\pi\right)$

Para obtener raíces de números complejos, es útil expresar al número complejo z en forma polar $z=|z|(cos\,\theta+isen\theta)$, entonces las raíces enésimas de z están dadas por:

$$z_k=\sqrt[n]{|z|}\left[cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+isen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]=\sqrt[n]{|z|}cis\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

donde $k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$

Interpretación geométrica de las n raíces de z: Todas las raíces se encuentran en una circunferencia con centro en el origen, de radio $\sqrt[n]{|z|}$ y están igualmente espaciadas, es decir formar un polígono regular (ver la Figura 5.5).

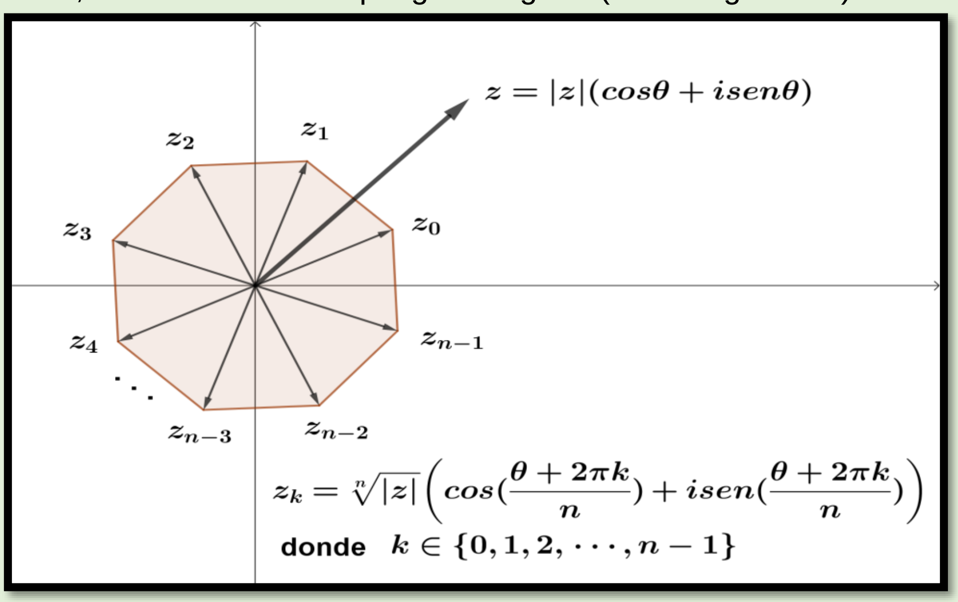


Figura 5. 3

Propiedades básicas

Conjugación compleja

a) Si $z = a + bi$ se tiene $\overline{z} = a - bi$

b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

c) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ donde $z_2 \neq 0$

d) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

e) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

f) $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$

g) $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

h) $\overline{\overline{z}} = z$

Módulo complejo

a) $|z| \geq 0$

b) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

d) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, donde $z_2 \neq 0$

e) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$

f) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

g) $|\overline{z}| = |z|$

h) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

i) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2|$

j) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow arg(z_1) = arg(z_2)$

k) $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$

Propiedades del argumento

a) $arg(z_1 \cdot z_2) = arg(z_1) + arg(z_2) \quad (\text{mod } 2\pi)$

b) $arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2) \quad (\text{mod } 2\pi)$

c) $arg(\overline{z}) = -arg(z_1) \quad (\text{mod } 2\pi)$

d) Si $z = |z|\left(cos(\theta) + isen(\theta)\right) \Rightarrow \theta = \dfrac{arg(z) - arg(\overline{z})}{2}$

Potencias de $"i"$

$$i^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 4k \text{ para } k \in \mathbb{Z} \\ i \text{ si } n = 4k + 1 \text{ para } k \in \mathbb{Z} \\ -1 \text{ si } n = 4k + 2 \text{ para } k \in \mathbb{Z} \\ -i \text{ si } n = 4k + 3 \text{ para } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Solución:

Se tiene que expresar al número $-i$ en forma polar o trigonométrica

$$-i=|-i|\left[cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)+isen\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right]=cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)+isen\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

Usando la fórmula $z_k=\sqrt[n]{|z|}\left[cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+isen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$ donde

$k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$

En este caso se tiene que $z=-i$, $n=4$ y $k\in\{0,1,2,3\}$

Luego, las raíces cuartas de $-i$ son:

$$\begin{cases}
z_0=\sqrt[3]{|-i|}\left(cos\left(\dfrac{\frac{3}{2}\pi+2(0)\pi}{4}\right)+isen\left(\dfrac{\frac{3}{2}\pi+2(0)\pi}{8}\right)\right)=1\left(cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)+isen\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)\right)\\
z_1=\sqrt[3]{|-i|}\left(cos\left(\dfrac{\frac{3}{2}\pi+2(1)\pi}{4}\right)+isen\left(\dfrac{\frac{3}{2}\pi+2(1)\pi}{4}\right)\right)=1\left(cos\left(\dfrac{7}{8}\pi\right)+isen\left(\dfrac{7}{8}\pi\right)\right)\\
z_2=\sqrt[3]{|-i|}\left(cos\left(\dfrac{\frac{3}{2}\pi+2(2)\pi}{4}\right)+isen\left(\dfrac{\frac{3}{2}\pi+2(2)\pi}{4}\right)\right)=1\left(cos\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)+isen\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)\right)\\
z_3=\sqrt[3]{|-i|}\left(cos\left(\dfrac{\frac{3}{2}\pi+2(3)\pi}{4}\right)+isen\left(\dfrac{\frac{3}{2}\pi+2(3)\pi}{4}\right)\right)=1\left(cos\left(\dfrac{15\pi}{8}\right)+isen\left(\dfrac{15\pi}{8}\right)\right)
\end{cases}$$

(ver la Figura 5.6).

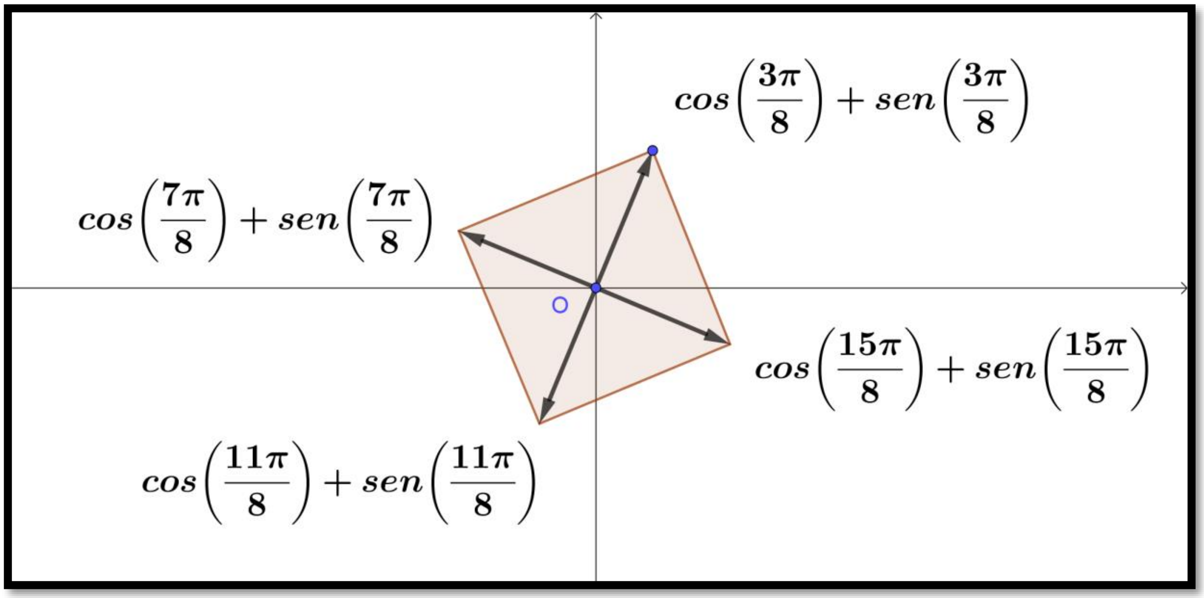


Figura 5.4

Respuesta correcta: B)

Situación 2. Los números complejos en la geometría (recta y circunferencia).

2.1 La ecuación de la recta $y = mx + b$ en el plano complejo es

A) $\left(\frac{m+i}{2}\right)z + \left(\frac{m-i}{2}\right)\bar{z} + b = 0$, donde $z = x + iy$

B) $\left(\frac{m+i}{2}\right)z - \left(\frac{m-i}{2}\right)\bar{z} - b = 0$, donde $z = x + iy$

C) $\left(\frac{m-i}{2}\right)z - \left(\frac{m+i}{2}\right)\bar{z} - b = 0$, donde $z = x + iy$

D) $\left(\frac{m-i}{2}\right)z + \left(\frac{m+i}{2}\right)\bar{z} + b = 0$, donde $z = x + iy$

Solución:

Sea $z = x + iy$ en el plano complejo, entonces $\text{Re}(z) = x$ y $\text{Im}(z) = y$, al sustituir en la ecuación de la recta $y = mx + b$, tenemos $\text{Im}(z) = m(\text{Re}(z)) + b$.

Pero también $\text{Re}(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ e $\text{Im}(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, al sustituir en la expresión anterior

$\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=m\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2}\right)+b$, luego como $\dfrac{1}{i}=-i$

$$\frac{z-\bar{z}}{2i}=m\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)+b\Rightarrow\left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right)(-i)=m\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)+b\Rightarrow m\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)+i\left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right)+b=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{m+i}{2}\right)z+\left(\frac{m-i}{2}\right)\bar{z}+b=0$$

Sea $B=\dfrac{m+i}{2}\Rightarrow\bar{B}=\dfrac{m-i}{2}$ y la ecuación se reduce a $Bz+\bar{B}\bar{z}+b=0$

Respuesta correcta: A)

2.2 La ecuación de la recta vertical $x=c$ en el plano complejo es:

A) $z+\bar{z}-c=0$, donde $z=x+iy$

B) $z+\bar{z}-2c=0$, donde $z=x+iy$

C) $z+\bar{z}+c=0$, donde $z=x+iy$

D) $z+\bar{z}+2c=0$, donde $z=x+iy$

Solución:

Sea $z=x+iy$ en el plano complejo, entonces $\text{Re}(z)=x$ al sustituir en la ecuación de la recta $x=c$, se tiene $\text{Re}(z)=c$. Pero también $\text{Re}(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, al sustituir en la expresión anterior se tiene $\dfrac{z+\bar{z}}{2}=c\Rightarrow z+\bar{z}-2c=0$, se puede notar que la ecuación de la recta en el plano complejo $Bz+\bar{B}\bar{z}+b=0$ es vertical si se tiene que $B=1$

Respuesta correcta: B)

2.3 La ecuación de la circunferencia con centro en (x_0, y_0) y radio r en el plano complejo es

A) $z\cdot\bar{z}+\bar{z}_0\cdot z+z_0\cdot\bar{z}+|z_0|^2+r^2=0$, donde $z_0=x_0+iy_0$

B) $z\cdot\bar{z}+\bar{z}_0\cdot z+z_0\cdot\bar{z}+|z_0|^2-r^2=0$, donde $z_0=x_0+iy_0$

C) $z\cdot\bar{z}-\bar{z}_0\cdot z-z_0\cdot\bar{z}+|z_0|^2-r^2=0$, donde $z_0=x_0+iy_0$

D) $z\cdot\bar{z}-\bar{z}_0\cdot z-z_0\cdot\bar{z}+|z_0|^2+r^2=0$, donde $z_0=x_0+iy_0$

Solución:

Como (x_0, y_0) es el centro de la circunferencia en forma cartesiana, entonces se puede considerar al complejo $z_0=x_0+y_0 i$ como el centro en el plano complejo, entonces todos los puntos z en el plano complejo que distan de z_0 una distancia r cumplen que

$$|z-z_0|=r \Leftrightarrow |z-z_0|^2=r^2 \Leftrightarrow (z-z_0)\cdot\left(\overline{z-z_0}\right)=r^2 \Leftrightarrow (z-z_0)\cdot\left(\bar{z}-\bar{z}_0\right)=r^2$$

$$\Leftrightarrow z\cdot\bar{z}-\bar{z}_0\cdot z-z_0\cdot\bar{z}+|z_0|^2-r^2=0$$

Sean $A=1$, $B=-\bar{z}_0$ y $C=|z_0|^2-r^2$ entonces la ecuación queda escrita como

$Az\cdot\bar{z}+B\cdot z+\bar{B}\cdot\bar{z}+C=0$, notar que A y C son números reales

Respuesta correcta: C)

2.4 Si en la ecuación $Az\cdot\bar{z}+B\cdot z+\bar{B}\cdot\bar{z}+C=0$, donde A y C son números reales, $A\neq 0$ representa una circunferencia en el plano complejo. ¿Cuál es su radio en términos de A, B y C?

A) $r=\dfrac{\sqrt{|B|^2+AC}}{|A|}$

B) $r=\dfrac{\sqrt{|B|-AC}}{|A|}$

C) $r=\dfrac{\sqrt{|B|+AC}}{|A|}$

D) $r=\dfrac{\sqrt{|B|^2-AC}}{|A|}$

Solución:

Como $Az\cdot\bar{z}+B\cdot z+\overline{B}\cdot\bar{z}+C=0$ es la ecuación de la circunferencia y A es un número real diferente de cero, al dividir cada miembro de la ecuación por A, se obtiene

$z\cdot\bar{z}+\frac{B}{A}\cdot z+\frac{\overline{B}}{A}\cdot\bar{z}+\frac{C}{A}=0$,

por lo que el centro es $\frac{B}{A}=-\overline{z_0}\Rightarrow-\frac{B}{A}=\overline{z_0}\Rightarrow\overline{-\frac{B}{A}}=\bar{\bar{z_0}}\Rightarrow-\frac{\overline{B}}{\overline{A}}=z_0\Rightarrow z_0=-\frac{\overline{B}}{A}$

Además $|z_0|^2=z_0\cdot\overline{z_0}=\left(-\frac{\overline{B}}{A}\right)\cdot\left(\overline{-\frac{\overline{B}}{A}}\right)=\frac{|B|^2}{A^2}$

Por lo que para el radio se tiene $\frac{C}{A}=|z_0|^2-r^2\Rightarrow r^2=|z_0|^2-\frac{C}{A}\Rightarrow r^2=\frac{A|z_0|^2-C}{A}$

Luego $r^2=\frac{A|z_0|^2-C}{A}=\frac{A\frac{|B|^2}{A^2}-C}{A}=\frac{\frac{|B|^2-AC}{A}}{A}=\frac{|B|^2-AC}{A^2}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{|B|^2-AC}}{|A|}$

Respuesta correcta: D)

Situación 3. Números complejos dentro del campo de la trigonometría.

3.1 Si $z=cos\,\theta+isen\,\theta$ expresar $sen\,\theta$ en términos de z y de $\frac{1}{z}$

A) $sen\,\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

B) $sen\,\theta=\frac{1}{2i}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

C) $sen\,\theta=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$

D) $sen\,\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$

Solución:

Si $z = cos\,\theta + isen\;\theta$ entonces $\overline{z} = cos\,\theta - isen\;\theta$ y además se tiene que

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{cos\,\theta - isen\;\theta}{(cos\,\theta)^2 + (sen\;\theta)^2} = \frac{cos\,\theta - isen\;\theta}{1} = cos\,\theta - isen\;\theta = \overline{z} \Rightarrow \frac{1}{z} = \overline{z}$$

es decir $\frac{1}{z} = \overline{z}$ para todo complejo z cuyo módulo sea 1, luego como $z = cos\,\theta + isen\;\theta$ y $\frac{1}{z} = cos\,\theta - isen\;\theta$ se tiene $z + \frac{1}{z} = 2cos\,\theta$ y $z - \frac{1}{z} = 2i \cdot sen\;\theta$. Por lo tanto $cos\,\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ y $sen\;\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$.

Respuesta correcta: D)

3.2 Si $z = cos\,\theta + isen\;\theta$ expresar $\cos(n\theta)$ en términos de z^n y de $\frac{1}{z^n}$

A) $cos(n\theta) = \frac{1}{2i}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$

B) $cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$

C) $cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$

D) $cos(n\theta) = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$

Solución:

Si $z = cos\,\theta + isen\;\theta$, por la fórmula de Moivre tenemos que la potencia enésima de z es $z^n = (cos\,\theta + isen\;\theta)^n = cos(n\,\theta) + isen(n\theta)$, y análogamente para la potencia enésima de $\frac{1}{z} = \overline{z}$ es $\frac{1}{z^n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = (cos\,\theta - isen\;\theta)^n = cos(n\,\theta) - isen(n\theta)$

Como $z^n = cos(n\,\theta) + isen(n\theta)$ y $\frac{1}{z^n} = cos(n\,\theta) - isen(n\,\theta)$, se tiene $z^n + \frac{1}{z^n} = 2cos(n\,\theta)$ y $z - \frac{1}{z} = 2i \cdot sen(n\theta)$ Por lo tanto $cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$ y $sen(n\theta) = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$.

Respuesta correcta: B)

3.3 Deducir la identidad $sen^2\theta$ en términos de ángulo doble del $cos\,\theta$

A) $sen^2\ \theta = \dfrac{1-cos(2\theta)}{2}$

B) $sen^2\ \theta = \dfrac{1+cos(2\theta)}{2}$

C) $sen^2\ \theta = \dfrac{1-sen(2\theta)}{2}$

D) $sen^2\ \theta = \dfrac{1+sen(2\theta)}{2}$

Solución:

Si $z = cos\,\theta + isen\ \theta \Rightarrow \begin{cases} z^2 = (cos\,\theta + isen\ \theta)^2 = cos(2\theta) + isen(2\theta) \\ \text{y} \\ z^{-2} = (cos\,\theta - isen\ \theta)^2 = cos(2\theta) - isen(2\theta) \end{cases}$

Por Moivre se tiene

$$sen\ \theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \Rightarrow sen^2\theta = \left(\frac{1}{2i}\right)^2\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(z^2 - 2 + z^{-2}\right)$$

$$\Rightarrow sen^2\theta = -\frac{1}{4}\left[\left(\cos(2\theta) + \cancel{isen(2\theta)}\right) - 2 + \left(\cos(2\theta) - \cancel{isen(2\theta)}\right)\right] = -\frac{1}{4}\left[2\cos(2\theta) - 2\right]$$

$$\Rightarrow sen^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

Respuesta correcta: A)

3.4 Deducir la identidad $cos^3\,\theta$ en términos de ángulos múltiples del $cos\,\theta$ o $sen\ \theta$

A) $cos^3\,\theta = \dfrac{cos(3\theta) - 3cos\,\theta}{4}$

B) $cos^3\,\theta = \dfrac{cos(3\theta) + 3cos\,\theta}{4}$

C) $cos^3\ \theta = \dfrac{-sen(3\theta) + 3sen\ \theta}{4}$

D) $cos^3\ \theta = \dfrac{sen(3\theta) - 3sen\ \theta}{4}$

Solución:

Si $z = cos\,\theta + isen\;\theta \Rightarrow \begin{cases} z^3 = (cos\,\theta + isen\;\theta)^3 = cos(3\theta) + isen(3\theta) \\ \text{y} \\ z^{-3} = (cos\,\theta - isen\;\theta)^3 = cos(3\theta) - isen(3\theta) \end{cases}$

Por Moivre se tiene que

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \Rightarrow \cos^3\theta = \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(z^3 + 3z + 3z^{-1} + z^{-3}\right)$$

$$\Rightarrow \cos^3\theta$$

$$= \frac{1}{8}\left[\cos(3\theta) + \cancel{isen(3\theta)} + 3\left(\cos\theta + \cancel{isen\theta}\right) + 3\left(\cos\theta - \cancel{isen\theta}\right) + \cos(3\theta) - \cancel{isen(3\theta)}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[2\cos(3\theta) + 6\cos\theta\right] = \frac{1}{4}\left[\cos(3\theta) + 3\cos\theta\right] \Rightarrow \cos^3\theta = \frac{\cos(3\theta) + 3\cos\theta}{4}$$

Respuesta correcta: B)

AUTOEVALUACIÓN

Situación 4. Fracciones continuas con números complejos.

4.1 La forma binomial de la fracción $\dfrac{i}{1+i}$ es:

A) $2+2i$

B) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

C) $2-2i$

D) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

4.2 La forma binomial de la fracción $\dfrac{i}{1+i+\dfrac{i}{1+i}}$ es:

A) $3-3i$

B) $3+3i$

C) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}i$

D) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}i$

4.3 La forma binomial de la fracción $\dfrac{i}{1+i+\dfrac{i}{1+i+\dfrac{i}{1+i}}}$ es:

A) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}i$

B) $\dfrac{3}{8}-\dfrac{3}{8}i$

C) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}i$

D) $\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{8}i$

4.4 La forma binomial de la fracción $\dfrac{i}{1+i+\dfrac{i}{1+i+\dfrac{i}{1+i+\dfrac{i}{1+i}}}}$ es:

A) $\dfrac{4}{11}+\dfrac{4}{11}i$

B) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}i$

C) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}i$

D) $\dfrac{4}{11}-\dfrac{4}{11}i$

BIBLIOGRAFÍA

Cárdenas, H., LLuis, E., Raggi, F. y Tomás, F. (2007). *Álgebra Superior*. México: Trillas.

De Oteyza, E., Lam E., Hernández C. y Carrillo Ángel. (2016). *Temas Selectos de Matemáticas*. México: Pearson Educación.

Lehmann, C. (2008). *Álgebra.* México: Limusa

Swokowski, E. & Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Cengage Learning.

UNIDAD 6. ECUACIONES E INECUACIONES POLINOMIALES EN UNA VARIABLE

Objetivos específicos

El alumno:

- Planteará problemas que se modelen mediante ecuaciones polinómicas de grado superior a dos y los resolverá a través de las técnicas basadas en los teoremas correspondientes, con el fin de desarrollar un pensamiento lógico y abstracto.

- Resolverá inecuaciones que se reduzcan a la solución de inecuaciones de grado uno o dos, mediante el uso de las propiedades de orden y de valor absoluto con el fin de desarrollar un pensamiento analítico.

- Explicará la relación entre los resultados de una ecuación o una inecuación polinomial obtenidos analíticamente con la representación gráfica de la función polinomial afín, para potenciar su aprendizaje.

Situación 1. Resolución de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros.

1.1 Las raíces enteras de $4x^5 + x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$ son:

A) -1
B) No tiene raíces enteras
C) 1
D) -2

Conceptos básicos de polinomios

Una expresión de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, donde $a_i \in \mathbb{R}$ (o $a_i \in \mathbb{C}$) para toda $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ es llamada un polinomio en la variable "x", todos los a_i son llamados coeficientes. Cada a_ix^i de la expresión es llamado el i-ésimo término del polinomio. Si $a_n \neq 0$ el polinomio es de grado n, y al término a_nx^n se le conoce como el término principal. Si $a_n = 1$ al polinomio se le llama mónico.

Las constantes distintas de cero son consideradas como polinomios de grado cero, pero si la constante es cero es llamado el polinomio nulo y no se le asigna ningún grado o bien se dice que es de grado ∞.

A menudo es conveniente escribir a los polinomios con la notación de función, es decir $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, por lo que al hacer una sustitución de un número "c" en lugar de la "x" en $P(x)$, se obtiene el valor numérico del polinomio cuando $x=c$ el cual se denotado por $P(c)$.

Dos polinomios $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ y $Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m$ se consideran iguales si $a_i=b_i$ para toda $i\in\{1,2,\cdots,n\}$.

Operaciones entre polinomios

Sean $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ y $Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m$, dos polinomios donde $m\leq n$, se tiene que:

a) La suma o resta entre estos polinomios es $(P\pm Q)(x)=(a_0\pm b_0)+(a_1\pm b_1)x+(a_2\pm b_2)x^2+\cdots+(a_n\pm b_n)x^n$, donde el grado de la suma o resta es menor o igual a n.

b) Para obtener el producto de dos polinomios, hay que multiplicar todos los términos de uno con todos los términos del otro, y simplificar los términos semejantes, se recomienda hacer la multiplicación por el método de coeficientes separados para evitar trabajo inútil, (ver situación 1.4).
Si a_nx^n y b_mx^m son los términos principales de ambos polinomios entonces el término principal del producto será $a_nb_mx^{n+m}$ por lo que el grado del producto es $n+m$.

c) Para la división de los polinomios P y Q, se usa el algoritmo de la división con el cual se obtienen dos polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que $P(x)=Q(x)q(x)+r(x)$ donde los polinomios $q(x)$ y $r(x)$ son llamados el cociente y el residuo respectivamente.
Si a_nx^n y b_mx^m son los términos principales de P y Q respectivamente, tenemos que $\text{grad}(q)=\text{grad}(P)-\text{grad}(Q)$, donde el término principal de $q(x)$ es $\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ y $0\leq\text{grad}(r(x))<\text{grad}(Q(x))$.

Si el residuo $r(x)$ es nulo, se dice que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$.

Al realizar una división o una multiplicación se recomienda aplicar el método de coeficientes separados, en el caso de que el polinomio $Q(x)$ sea de grado uno se recomienda usar el método de la división sintética.

Nota: Para aplicar el método de coeficientes separados o el de la división sintética es importante no olvidar los coeficientes nulos de los términos faltantes.

Teorema del residuo (1)
Si el polinomio P es dividido por el monomio $x-c$, entonces el residuo de la división es el valor numérico $P(c)$.

Teorema del factor (2)
Si c es una raíz del polinomio P, es decir $P(c)=0$ entonces $x-c$ es un factor de P, es decir $P(x)$ es divisible por $x-c$.

Ecuación algebraica
Si P es un polinomio con coeficientes reales o complejos con $\text{grad}(P)\geq 1$ entonces $P(x)=0$ es llamada una ecuación algebraica. Si un número c satisface la ecuación $P(x)=0$, se dice c es una raíz del polinomio P.
Si $\text{grad}(P)=n$ se dice que el grado de la ecuación $P(x)=0$ es n.

Las ecuaciones algebraicas son llamadas según su grado como sigue:
Si $a_0+a_1x=0$ es de grado 1 (lineal), si $a_0+a_1x+a_2x^2=0$ es de grado 2 (cuadrática), si $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0$ es de grado 3 (cúbica).

Corolario (del *teorema del residuo* y del *factor*)
a) Si la ecuación $P(x)=0$ es de grado n, a lo más tiene n raíces distintas.
b) Si se conocen m raíces $c_1,c_2,\cdots,c_m$ de la ecuación $P(x)=0$, donde $m<n$ entonces $P(x)=(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_m)P_m(x)$, donde $P_m(x)$ es un polinomio de $\text{grad}(P_m)=n-m$ llamado el *polinomio reducido* y se obtiene al dividir $P(x)$ entre $(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_m)$.

Teorema de Identidad (3)
Si P y Q son dos polinomios ambos de grado menor o igual a n y ambos coinciden en más de n valores, entonces los polinomios son iguales.

Teorema Fundamental del Álgebra (4)
Toda ecuación algebraica con coeficientes complejos siempre tiene una raíz real o compleja.

En forma equivalente
Todo polinomio $P(x)$ con coeficientes complejos de grado n se puede factorizar en n factores lineales, es decir existen $c_1,c_2,\cdots,c_n$ números reales o complejos tal que $P(x)=a_n(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n)$ donde a_n es el coeficiente del término principal de $P(x)$

Nota: Si un factor $x-c_i$ de $P(x)$, para algún $i\in\{1,2,3,\cdots,n\}$ se repite k veces, decimos que la raíz c_i es de multiplicidad k, y en este caso $P(x)$ se puede expresar con $n-k$ factores lineales y uno de grado k

$$P(x)=a_n(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_{i-1})(x-c_i)^k(x-c_{i+1})\cdots(x-c_{n-k}).$$

Si al factorizar $P(x)$ se consideran todas las multiplicidades de sus raíces tenemos $P(x)=a_n(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\cdots(x-c_l)^{k_l}$ donde $k_1+k_2+\cdots+k_l=n$.

Teorema (5)

Si $P(x)=0$ es una ecuación de grado n, y c es una raíz de multiplicidad k, entonces $P(c)=P'(c)=P''(c)=\cdots=P^{k-1}(c)=0$ y $P^k(c)\neq 0$

Si $k=1$ se dice que la raíz es simple, si $k=2$ se dice que la raíz es doble, si se dice que la raíz es triple, si $k=4$, se dice que la raíz es cuádruple, etc.

Corolario

Todo polinomio $P(x)$ con coeficientes reales se puede descomponer en factores lineales o cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

Teorema (6)

Si $P(x)=0$ es una ecuación algebraica con coeficientes reales y $c=a+bi$ es una raíz compleja de $P(x)=0$ de multiplicidad k entonces $\bar{c}=a-bi$ también es una raíz de $P(x)=0$ y de multiplicidad k, es decir las raíces aparecen en pares conjugados.

Fórmulas de Vieta (relacionan las raíces de un polinomio con sus coeficientes)

- Sea $P(x)=a_1x+a_0$ lineal donde $a_1\neq 0$, si c_1 es la raíz entonces $c_1=-\dfrac{a_0}{a_1}$
- Sea $P(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ cuadrático donde $a_2\neq 0$, si c_1 y c_2 son las dos raíces entonces $c_1+c_2=-\dfrac{a_1}{a_2}$ y $c_1\cdot c_2=\dfrac{a_0}{a_2}$
- Sea $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ cúbico donde $a_3\neq 0$, si c_1, c_2 y c_3, son las tres raíces entonces $c_1+c_2+c_3=-\dfrac{a_2}{a_3}$, $c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3=\dfrac{a_1}{a_3}$ y $c_1\cdot c_2\cdot c_3=-\dfrac{a_0}{a_3}$

y así sucesivamente para ecuaciones de mayor grado.

El siguiente resultado es útil para encontrar las raíces racionales de un polinomio con coeficientes racionales.

Se dice que dos enteros s y t son primos relativos, si su máximo común divisor entre ellos es 1.

Teorema (7)

Sea $P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$ con coeficientes enteros.

a) Si r es una raíz entera de $P(x)=0$ entonces r es un divisor de c_0.

b) Si $\dfrac{s}{t}$ es una raíz racional de $P(x)=0$, donde s, t son enteros $t\neq 0$ y primos relativos entre sí entonces s divide a c_0 y t divide a c_n.

En el caso de que $Q(x)=\dfrac{a_0}{b_0}+\dfrac{a_1}{b_1}x+\dfrac{a_2}{b_2}x^2+\cdots+\dfrac{a_n}{b_n}x^n=0$ donde a_i, $b_i\in\mathbb{Z}$ y $b_i\neq 0$ para toda $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, si b es el máximo común divisor de $b_1,b_2,\cdots,b_n$, al multiplicar la ecuación por b se obtiene una ecuación algebraica con coeficientes enteros, que tiene las mismas raíces que la ecuación $Q(x)=0$.

Regla de los signos de Descartes

Dada la ecuación $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$, con coeficientes reales, se tiene que el número de raíces reales positivas nunca es mayor al número de variaciones de signo de sus coeficientes $a_0,a_1,\cdots,a_n$ y si es menor, siempre lo es en un número par.

Nota: Si se quiere determinar el número de raíces reales negativas, se aplica la regla a $P(-x)=0$.

Solución:

Si r es una raíz entera de la ecuación entonces r es un divisor de -1 (el término independiente del polinomio), y el conjunto de divisores de éste es $\{-1,\ 1\}$, para ver si algunos de estos números de este conjunto es raíz de la ecuación, se usa la técnica de la división sintética

$$
\begin{array}{c|cccccc l}
 & & -4 & 4 & -5 & 6 & -3 & \\
-1 & 4 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & \rightarrow \text{Dividendo}\\
\hline
\downarrow & 4 & -4 & 5 & -6 & 3 & \boxed{-4} & \\
\text{Divisor} & & & \text{Cociente} & & & & \searrow \\
 & & & & & & & \text{Residuo}
\end{array}
$$

como el residuo es $-4 \neq 0$ se tiene que -1 no es raíz, análogamente se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & & 4 & 4 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ \hline & 4 & 4 & 5 & 4 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

como el residuo es 0 se tiene que 1 es raíz

Respuesta correcta: C)

1.2 Las raíces racionales de $4x^5 + x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$ son:

A) $\frac{1}{2}$
B) $-\frac{1}{2}$
C) No tiene raíces racionales
D) 1 y $-\frac{1}{2}$

Solución:

Por el ejercicio anterior tenemos que el polinomio se descompone como

$$4x^5 + x^3 - x^2 - 3x - 1 = (x-1)(4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1)$$

Así que basta encontrar las raíces racionales de $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

Como el polinomio tiene coeficientes enteros, para encontrar las raíces racionales, se obtiene los divisores del término independiente 1 del polinomio, en este caso son -1 y 1, y también los divisores del coeficiente del término principal $4x^4$ del polinomio, en este caso son $-4, -2, -1, 1, 2$ y 4, al hacer todos los posibles cocientes de los elementos del conjunto $\{-1, 1\}$, entre los del conjunto $\{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$, se obtiene $\left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, cuyos elementos son las posibles raíces racionales. Otra vez se aplica la división sintética, para determinamos cuáles de estos números son raíces.

Se tiene -1 no fue raíz por el ejercicio anterior

Así que iniciamos con $-\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & & -2 & -1 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 4 & 4 & 5 & 4 & 1 \\ \hline & 4 & 2 & 4 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

como el residuo es 0 se tiene que $-\frac{1}{2}$ es raíz

$$\begin{array}{r|rrrrr} & & -1 & -\frac{3}{4} & -\frac{17}{16} & -\frac{47}{64} \\ -\frac{1}{4} & 4 & 4 & 5 & 4 & 1 \\ \hline & 4 & 3 & \frac{17}{4} & \frac{47}{16} & \boxed{\frac{17}{64}} \end{array}$$

como el residuo es $\frac{17}{64} \neq 0$ se tiene que $-\frac{1}{4}$ no es raíz

$$\begin{array}{r|rrrrr} & & 1 & \frac{5}{4} & \frac{25}{16} & -\frac{89}{64} \\ \frac{1}{4} & 4 & 4 & 5 & 4 & 1 \\ \hline & 4 & 5 & \frac{25}{4} & \frac{89}{16} & \boxed{-\frac{25}{64}} \end{array}$$

como el residuo es $-\frac{25}{64} \neq 0$ se tiene que $\frac{1}{4}$ no es raíz

$$\begin{array}{r|rrrrr} & & 2 & 3 & 4 & 4 \\ \frac{1}{2} & 4 & 4 & 5 & 4 & 1 \\ \hline & 4 & 6 & 8 & 8 & \boxed{5} \end{array}$$

como el residuo es $5 \neq 0$ se tiene que $\frac{1}{2}$ no es raíz.

Como 1 fue raíz entera y todo entero también es racional, se tiene que las raíces racionales son $-\frac{1}{2}$ y 1.

Respuesta correcta: D)

1.3 La multiplicidad de las raíces racionales de $4x^5 + x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$ es:

A) 1 y $-\frac{1}{2}$ son raíces de multiplicidad simple

B) 1 y $-\frac{1}{2}$ son de multiplicidad doble

C) La multiplicidad de 1 es doble y la de $-\frac{1}{2}$ es simple

D) La multiplicidad de $-\frac{1}{2}$ es doble y la de 1 es simple

Solución:

Como 1 es raíz de la ecuación $4x^5+x^3-x^2-3x-1=0$, y si se quiere determinar la multiplicidad que tiene debemos analizar la derivada del polinomio. Así que su derivada es $20x^4+3x^2-2x-3$, luego

$$\begin{array}{r|rrrrr} & & 20 & 20 & 27 & 25 \\ 1 & 20 & 0 & 3 & -2 & -3 \\ \hline & 20 & 20 & 27 & 25 & \boxed{22} \end{array}$$

Como el residuo es $22\neq 0$, por el teorema **(1)** se tiene que 1 no es raíz de la derivada del polinomio, por lo tanto, 1 es una raíz simple del polinomio.

Como $-\frac{1}{2}$ es una raíz del polinomio $4x^5+x^3-x^2-3x-1=0$, y si se quiere determinar su multiplicidad se aplica otra vez la división sintética a la primera derivada en $-\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & & -10 & 5 & -4 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 20 & 0 & 3 & -2 & -3 \\ \hline & 20 & -10 & 8 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

como el residuo es 0 se tiene que $-\frac{1}{2}$ es raíz de $20x^4+3x^2-2x-3=0.$ Nuevamente se deriva $20x^4+3x^2-2x-3$ y se obtiene $80x^3+6x-2=0$, se aplica la división sintética para calcular el valor numérico, al evaluar la segunda derivada en $-\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & & -40 & 20 & -13 \\ -\frac{1}{2} & 80 & 0 & 6 & -2 \\ \hline & 80 & -40 & 26 & \boxed{-15} \end{array}$$

como el residuo es $-15\neq 0$, se tiene por el teorema **(1)**, que $-\frac{1}{2}$ no es raíz de la segunda derivada del polinomio inicial, por lo que $-\frac{1}{2}$ es una raíz doble.

Respuesta correcta: D)

1.4 Descomponer el polinomio $4x^5+x^3-x^2-3x-1$ en producto de potencias de factores lineales.

A) $(x+1)(2x+1)^2(x+i)(x-i)$

B) $(x+1)(2x-1)^2(x+i)(x-i)$

C) $(x-1)(2x+1)^2(x+i)(x-i)$

D) $(x-1)(2x-1)^2(x+i)(x-i)$

Solución:

Como el 1 es una raíz simple del polinomio $4x^5+x^3-x^2-3x-1$, al aplicar el teorema **(2)** se obtiene $4x^5+x^3-x^2-3x-1=(x-1)\left(4x^4+4x^3+5x^2+4x+1\right)$. Por otro lado como $-\dfrac{1}{2}$ es una raíz doble del polinomio $4x^5+x^3-x^2-3x-1$, entonces $-\dfrac{1}{2}$ también es una raíz doble del polinomio reducido $4x^4+4x^3+5x^2+4x+1$, así que $x+\dfrac{1}{2}$ divide dos veces al polinomio reducido, es decir $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=x^2+x+\dfrac{1}{4}$, divide a $4x^4+4x^3+5x^2+4x+1$, para obtener el resultado de la división se usa la técnica de la división por coeficientes separados, comprobando el resultado de la división con la multiplicación por coeficientes separados

$$
\begin{array}{ccc|ccccc}
 & & & 4 & 0 & 4 & & \\
\hline
1 & 1 & \frac{1}{4} & 4 & 4 & 5 & 4 & 1 \\
 & & & -4 & -4 & -1 & & \\
\hline
 & & & & 0 & 4 & 4 & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & & & & & 4 & 4 & 1 \\
 & & & & & -4 & -4 & -1 \\
\hline
 & & & & & & & \boxed{0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccl}
 & 4 & 0 & 4 & & \rightarrow 4x^2+0x+4 \\
\times & 1 & 1 & \frac{1}{4} & & \rightarrow x^2+x+4 \\
\hline
 & 4 & 0 & 4 & & \\
 & & 4 & 0 & 4 & \\
 & & & 1 & 0 \quad 1 & \\
\hline
 & 4 & 4 & 5 & 4 \quad 1 & \rightarrow 4x^4+4x^3+5x^2+4x+1
\end{array}
$$

$$4x^4+4x^3+5x^2+4x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\left(4x^2+0x+4\right)=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\left(x^2+1\right)=(2x+1)^2\left(x^2+1\right)$$

Finalmente, para factorizar el polinomio cuadrático x^2+1, basta recordar que las raíces cuadradas del -1 son i y $-i$, así $x^2+1=(x+i)(x-i)$, resumiendo se tiene

$$4x^5+x^3-x^2-3x-1=(x-1)\left(4x^4+4x^3+5x^2+4x+1\right)=(x-1)(2x+1)^2(x+i)(x-i)$$

Respuesta correcta: C)

Situación 2. Resolución de ecuaciones algebraicas que satisfaga algunas condiciones sobre el polinomio a resolver.

2.1 El número posible de raíces reales positivas del polinomio $4x^5 + x^3 - x^2 - 3x - 1$ es:

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3

Solución:

Al contar el número de cambios de signo, que tienen los coeficientes del polinomio $4x^5 + x^3 - x^2 - 3x - 1$

$$4 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad -3 \quad -1$$

$$\underbrace{4 \quad 0}_{0}$$

$$\underbrace{0 \quad 1}_{0}$$

$$\underbrace{1 \quad -1}_{1}$$

$$\underbrace{-1 \quad -3}_{0}$$

$$\underbrace{-3 \quad -1}_{0}$$

tenemos que sólo hay un cambio de signo y por la Regla de los signos de Descartes, la solución es, el polinomio tiene una raíz real positiva.

Respuesta correcta: A)

2.2 El número posible de raíces reales negativas del polinomio $4x^5 + x^3 - x^2 - 3x - 1$ es

A) 0 ó 1
B) 1 ó 3
C) 0 ó 2
D) 2 ó 4

Solución:

Si cambiamos x por $-x$ en el polinomio $4x^5+x^3-x^2-3x-1$ se obtiene

$$4(-x)^5+(-x)^3-(-x)^2-3(-x)-1=-4x^5-x^3-x^2+3x-1$$

Y al contar el número de cambios de signo, que tienen los coeficientes de este polinomio

$$-4 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad 3 \quad -1$$

$$\underbrace{-4 \quad 0}_{0}$$

$$\underbrace{0 \quad -1}_{0}$$

$$\underbrace{-1 \quad -1}_{0}$$

$$\underbrace{-1 \quad 3}_{1}$$

$$\underbrace{3 \quad -1}_{1}$$

se tienen dos cambios de signo y por la Regla de los signos de Descartes, la solución es, el polinomio a lo más tiene dos raíces reales negativas o ninguna de sus raíces reales es negativa.

Respuesta correcta: C)

2.3 Encontrar las soluciones de la ecuación $4x^5+x^3-x^2-3x-1=0$, si se sabe que una de las raíces es i y el producto de dos de sus raíces es $\frac{1}{4}$.

A) $-\frac{1}{2}, 1$, i y $-i$

B) $\frac{1}{2}$, -1, i y $-i$

C) $-\frac{1}{2}$, -1, i y $-i$

D) $\frac{1}{2}, 1$, i y $-i$

Solución:

Como los coeficientes del polinomio son reales, se tiene que las raíces complejas del polinomio vienen acompañadas de su conjugada, es decir el conjugado de la raíz también es raíz del polinomio por lo que usando el teorema **(2)** se tiene

$4x^5+x^3-x^2-3x-1=(x-i)(x+i)P(x)$, donde $P(x)$ es el polinomio reducido de grado 3, para determinarlo, se puede aplicar la división sintética con i y $-i$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & & 4i & -4 & -3i & 3-i & 1 \\
i & 4 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \\
\hline
 & 4 & 4i & -3 & -3i-1 & -i & \boxed{0}
\end{array}
\quad \text{y} \quad
\begin{array}{c|ccccc}
 & & -4i & 0 & 3i & i \\
-i & 4 & 4i & -3 & -3i-1 & -i \\
\hline
 & 4 & 0 & -3 & -1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Por lo que se tiene $4x^5+x^3-x^2-3x-1=(x-i)(x+i)\left(4x^3-3x-1\right)$.

Una manera de encontrar las raíces del polinomio reducido $4x^3-3x-1$, es usar las fórmulas de Vieta, para esto es necesario que sea mónico, así que el cociente que se obtiene al dividir el polinomio por el coeficiente del término principal es $x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$.

Luego, si r_1, r_2 y r_3 son las raíces del polinomio $x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$, se tiene que

$$r_1+r_2+r_3=0, \quad r_1\cdot r_2+r_1\cdot r_3+r_2\cdot r_3=-\frac{3}{4} \quad \text{y} \quad r_1\cdot r_2\cdot r_3=\frac{1}{4}$$

Por otro lado, otra de las hipótesis es que el producto de dos de sus raíces es $\frac{1}{4}$, estas no son i y $-i$, pues su producto es 1, así que las raíces que cumplen que su producto sea $\frac{1}{4}$, deberán de ser de las raíces del polinomio reducido, sin pérdida de generalidad, podemos decir que r_1 y r_2 son las dos raíces que cumplen esto, así $r_1\cdot r_2=\frac{1}{4}$.

$r_1\cdot r_2=\frac{1}{4}$ y $r_1\cdot r_2\cdot r_3=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{4}\cdot r_3=\frac{1}{4}\Rightarrow r_3=1.$

Y como $r_1+r_2+r_3=0$, $r_1+r_2=-1$ y $r_1\cdot r_2=\frac{1}{4}\Rightarrow r_1(-1-r_1)=\frac{1}{4}$,

$$\Rightarrow r_1^2+r_1+\frac{1}{4}=0\Rightarrow\left(r_1+\frac{1}{2}\right)^2=0\Rightarrow r_1+\frac{1}{2}=0\Rightarrow r_1=-\frac{1}{2}$$

Pero $r_1 \cdot r_2 = \frac{1}{4}$ se tiene entonces que $r_2 = \frac{\frac{1}{4}}{r_1} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$, por lo que $-\frac{1}{2}$ es raíz doble,

por lo tanto las soluciones de la ecuación son: $-\frac{1}{2}, 1, \ i$ y $-i$.

Respuesta correcta: A)

2.4 Encontrar todas las raíces de la ecuación $4x^5 + x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$, si se sabe que $-\frac{1}{2}$ es una raíz doble

A) $-\frac{1}{2}, 1, \ i$ y $-i$

B) $\frac{1}{2}, \ -1, \ i$ y $-i$

C) $-\frac{1}{2}, \ -1, \ i$ y $-i$

D) $-\frac{1}{2}, \ -1, \ i$ y $-i$

Solución:

Como $-\frac{1}{2}$ es una raíz doble entonces $\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ divide al polinomio, para factorizar se aplica la división sintética dos veces

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 4 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ \hline & 4 & -2 & 2 & -2 & -2 & \boxed{0} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{r|rrrrr} & & -2 & 2 & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 4 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ \hline & 4 & -4 & 4 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

Luego $4x^5 + x^3 - x^2 - 3x - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \left(4x^3 - 4x^2 + 4x - 4\right) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \left(x^3 - x^2 + x - 1\right)$, como el polinomio $x^3 - x^2 + x - 1$ tiene coeficientes enteros, las raíces enteras son divisores de -1, así que las únicas posibles son -1 o 1, se puede ver directamente que una de ellas es 1, otra vez por división sintética se tiene:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

por lo tanto $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)=(x-1)(x+i)(x-i)$

por lo que las raíces de la ecuación son: $-\frac{1}{2}$, 1, i y $-i$

Respuesta correcta: A)

Situación 3. Resolución de una inecuación por diferentes métodos.

3.1 Resolver la desigualdad $\left|\frac{1}{2}x-1\right|\leq|2x-2|$ usando propiedades de desigualdades

A) $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{6}{5},\infty\right)$

B) $\left(-\infty,-\frac{6}{5}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\infty\right)$

C) $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{6}{5},\infty\right)$

D) $\left(-\infty,-\frac{6}{5}\right]\cup\left[-\frac{2}{3},\infty\right)$

Conceptos básicos de orden

Los números reales $\mathbb{R}$ son un campo con las dos operaciones usuales (suma y producto).

Para dar la relación usual de orden en los números reales $\mathbb{R}$, se considera el conjunto $P=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}\subset\mathbb{R}$, es decir los números reales positivos.

El uso de “ $>$ ” y “ $\geq$”

1) Si $x,y\in\mathbb{R}$, decimos que $x>y$ si $(x-y)\in P$
2) Si $x,y\in\mathbb{R}$, decimos que $x\geq y$ si $(x-y)\in P\cup\{0\}$
3) Decimos $x<y$ si $y>x$
4) Decimos $x\leq y$ si $y\geq x$

Propiedades de orden

Sean a, b, c y d en $\mathbb{R}$

a) Si se tiene que $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$ (transitiva)

b) Para cualesquiera a y b, sólo una de las relaciones siguientes es verdadera $a > b$, $a = b$ ó $a < b$ (tricotomía)

c) Si se tiene que $a \geq b$ y $a \leq b \Rightarrow a = b$

d) Si se tiene que $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

e) El neutro multiplicativo y el neutro aditivo cumplen la relación $1 > 0$

f) Cualquier número natural cumple la relación $n > 0$

g) Si se tiene $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

h) Si se tiene que $a > b$ y $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

i) Si se tiene que $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow ac > bc$

j) Si se tiene que $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow ac < bc$

k) Si se tiene $a > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 0$

l) Si se tiene $a < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} < 0$

m) Si se tiene $a > 1 \Rightarrow a^2 > a$

n) Si se tiene $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a$

o) Si se tiene $a < b \Rightarrow a < \dfrac{a+b}{2} < b$

p)

i) $ab > 0 \Rightarrow a > 0$ y $b > 0$ ó $a < 0$ y $b < 0$

ii) $ab < 0 \Rightarrow a > 0$ y $b < 0$ ó $a < 0$ y $b > 0$

iii) $b \neq 0$, $\dfrac{a}{b} < 0 \Rightarrow a > 0$ y $b < 0$ ó $a < 0$ y $b > 0$

iv) $b \neq 0$, $\dfrac{a}{b} > 0 \Rightarrow a > 0$ y $b > 0$ ó $a < 0$ y $b < 0$

q) Si se tiene $0 < a < b$ y $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$

r) Si se tiene $0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

s) Si se tiene $a > 0$, $b > 0$ y $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$

t) Si se tiene $0 < a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

u) Si se tiene $a < b \Rightarrow a < a + \dfrac{b-a}{\sqrt{2}} < b$

v) Si se tiene $a > 0$, $b > 0 \Rightarrow \dfrac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$

Si $a \in \mathbb{R}$ denotamos y definimos el **valor absoluto de** a como

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Propiedades de valor absoluto

a) $|a| \geq 0$ para toda $a \in \mathbb{R}$

b) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

c) $|ab| = |a||b|$ para toda a y $b \in \mathbb{R}$

d) $|-a| = |a|$ para toda $a \in \mathbb{R}$

e) $|a|^2 = a^2$ para toda $a \in \mathbb{R}$

f) $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$ para toda $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

g) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ para toda $a,\ b \in \mathbb{R}$ donde $b \neq 0$

h) Sea $b \geq 0$ se tiene $|a| = b \Leftrightarrow a = \pm b$

i) Sea $b \geq 0$ se tiene $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b \Leftrightarrow a \in [-b, b]$

j) Sea $b \geq 0$ se tiene $|a| \geq b \Leftrightarrow a \geq b$ ó $a \leq -b \Leftrightarrow a \in (-\infty, -b] \cup [b, \infty)$

k) Sea $b < 0$, donde $|a| \geq b$, entonces cualquier $a \in \mathbb{R}$ cumple $|a| \geq b$

l) Sea $b < 0$, donde $|a| \leq b$, entonces ningún $a \in \mathbb{R}$ cumple $|a| \leq b$

m) $-|a| \leq a \leq |a|$ para toda $a \in \mathbb{R}$

n) $|a+b| \leq |a| + |b|$ para toda a y $b \in \mathbb{R}$

o) $|a-b| \leq |a| + |b|$ para toda a y $b \in \mathbb{R}$

p) $|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$

q) $\big||a| - |b|\big| \leq |a+b|$ para toda a y $b \in \mathbb{R}$

r) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$ para toda a y $b \in \mathbb{R}$

Solución:

Como $\left|\frac{1}{2}x - 1\right| \geq 0$ y $|2x-2| \geq 0 \underset{\substack{\text{Propiedad s)} \\ \text{de orden}}}{\Rightarrow} \left|\frac{1}{2}x - 1\right|^2 \leq |2x-2|^2$

$$\underset{\substack{\text{Propiedad e)} \\ \text{de valor absoluto}}}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 \leq (2x-2)^2 \underset{\substack{\text{Desarrollando} \\ \text{los binomios}}}{\Rightarrow} \frac{1}{4}x^2 - x + 1 \leq 4x^2 - 8x + 4$$

$$\underset{\substack{\text{Propiedad g)}\\ \text{de orden y}\\ \text{simplificando}}}{\Rightarrow} 0 \le \frac{15}{4}x^2 - 7x + 3 \quad \underset{\substack{\text{Multiplicamos}\\ \frac{\frac{15}{4}}{\frac{15}{4}}=1}}{\Rightarrow} 0 \le \frac{\left(\frac{15}{4}x\right)^2 - 7\left(\frac{15}{4}x\right) + \frac{15}{4}(3)}{\frac{15}{4}}$$

$$\underset{\substack{\text{Llamando}\\ \frac{15}{4}x=y}}{\Rightarrow} 0 \le \frac{4\left(y^2 - 7y + \frac{45}{4}\right)}{15} \quad \underset{\substack{\text{Completando}\\ \text{cuadrados}}}{\Rightarrow} 0 \le \frac{4\left(\left(y-\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{45}{4}\right)}{15}$$

$$\underset{\text{Simplificando}}{\Rightarrow} 0 \le \frac{4\left(y-\frac{7}{2}\right)^2 - 49 + 45}{15} \quad \underset{\text{Simplificando}}{\Rightarrow} 0 \le \frac{4}{15}\left(\left(y-\frac{7}{2}\right)^2 - 1\right)$$

$$\underset{\substack{\text{Propiedad p)}\\ \text{de orden}}}{\Rightarrow} \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 - 1 \ge 0 \quad \underset{\substack{\text{Factorizando}\\ \text{resta de cuadrados}}}{\Rightarrow} \left(\left(y-\frac{7}{2}\right) - 1\right)\left(\left(y-\frac{7}{2}\right) + 1\right) \ge 0$$

$$\underset{\text{Simplificando}}{\Rightarrow} \left(y-\frac{9}{2}\right)\left(y-\frac{5}{2}\right) \ge 0 \quad \underset{\substack{\text{Propiedad p)}\\ \text{de orden}}}{\Rightarrow} \begin{cases} y-\frac{9}{2} \ge 0 \text{ y } y-\frac{5}{2} \ge 0 \\ \text{ó} \\ y-\frac{9}{2} \le 0 \text{ y } y-\frac{5}{2} \le 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\text{Regresando}\\ y=\frac{15}{4}x}}{\Rightarrow} \begin{cases} \frac{15}{4}x-\frac{9}{2} \ge 0 \text{ y } \frac{15}{4}x-\frac{5}{2} \ge 0 \\ \text{ó} \\ \frac{15}{4}x-\frac{9}{2} \le 0 \text{ y } \frac{15}{4}x-\frac{5}{2} \le 0 \end{cases} \quad \underset{\substack{\text{Propiedad g)}\\ \text{de orden}}}{\Rightarrow} \begin{cases} \frac{15}{4}x \ge \frac{9}{2} \text{ y } \frac{15}{4}x \ge \frac{5}{2} \\ \text{ó} \\ \frac{15}{4}x \le \frac{9}{2} \text{ y } \frac{15}{4}x \le \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\text{Propiedad i)}\\ \text{de orden}\\ \text{simplificando}}}{\Rightarrow} \begin{cases} x \ge \frac{6}{5} \text{ y } x \ge \frac{2}{3} \\ \text{ó} \\ x \le \frac{6}{5} \text{ y } x \le \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\text{Escribir}\\ \text{en}\\ \text{Intervalos}}}{\Rightarrow}\begin{cases} x \in \left[\dfrac{6}{5},\infty\right) \cap \left[\dfrac{2}{3},\infty\right) = \left[\dfrac{6}{5},\infty\right) \\ \text{ó} \\ x \in \left(-\infty,\dfrac{6}{5}\right] \cap \left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right] = \left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right] \end{cases}$$ (ver Figura 6.1)

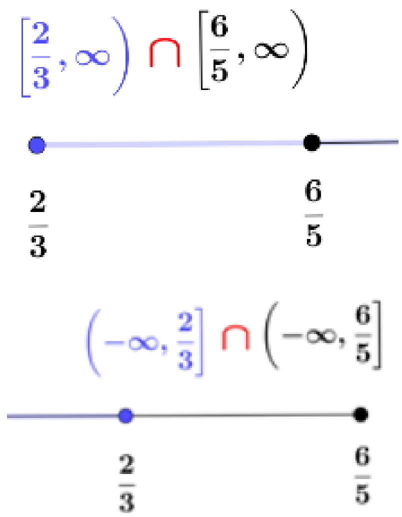


Figura 6.1

$$\underset{\text{Solución}}{\Rightarrow}\ x \in \left(-\infty,\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{5},\infty\right)$$ (ver Figura 6.2)

Figura 6.2

Respuesta correcta: A)

3.2 Resolver la desigualdad $\left|\frac{1}{2}x-1\right| \le |2x-2|$ por un método gráfico

A) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{5}, \infty\right)$

B) $\left(-\infty, -\frac{6}{5}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$

C) $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{5}, \infty\right)$

D) $\left(-\infty, -\frac{6}{5}\right] \cup \left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$

Solución:

El lado izquierdo de la inecuación se puede considerar como la función $f(x) = \left|\frac{1}{2}x-1\right|$. Primero se grafica $y = \frac{1}{2}x-1$ (lo que está dentro del valor absoluto), la cual representa una recta con pendiente $\frac{1}{2}$ y ordenada al origen -1, y posteriormente se obtiene valor absoluto como se muestra en la Figura 6.3

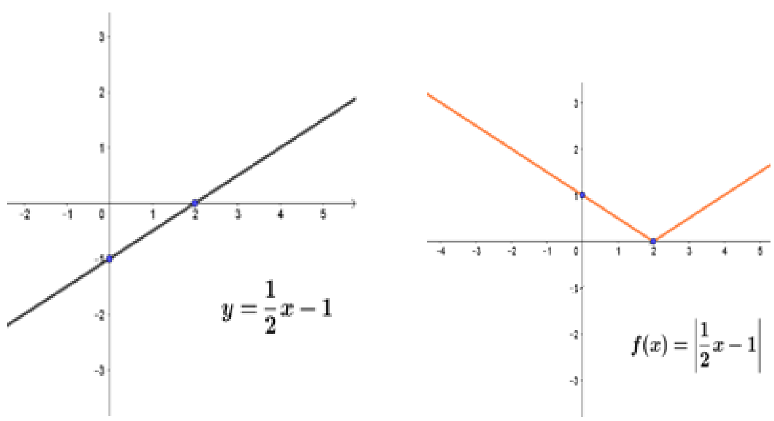


Figura 6.3

Análogamente se procede con la función $g(x) = |2x-2|$ (lado derecho de la inecuación), lo que está dentro del valor absoluto $y = 2x-2$ es una recta con pendiente 2 y ordenada al origen -2, posteriormente se obtiene el valor absoluto como se muestra en la Figura 6.4

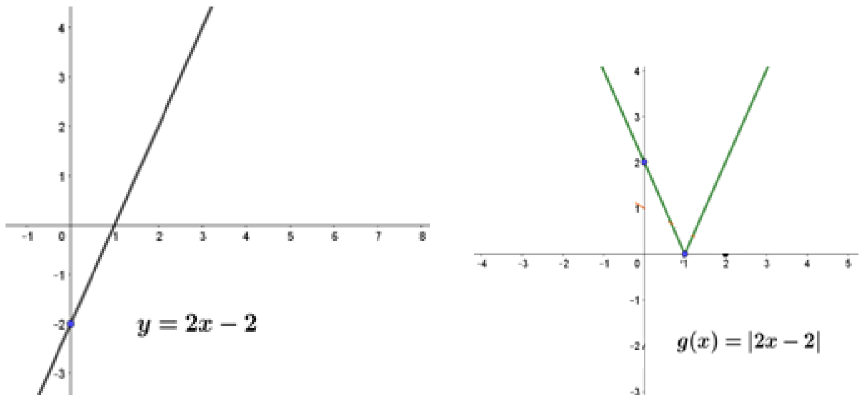


Figura 6.4

Para encontrar la intersección de las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se usa una de las propiedades del valor absoluto como sigue

$$\left|\frac{1}{2}x-1\right| = |2x-2| \underset{\substack{\text{Propiedad h)} \\ \text{de valorabsoluto}}}{\Rightarrow} \begin{cases} \frac{1}{2}x-1 = 2x-2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \\ \text{ó} \\ \frac{1}{2}x-1 = -(2x-2) \Rightarrow x = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Y Como $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$, $g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$, $f\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{2}{5}$ y $g\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{2}{5}$, $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ y $\left(\frac{6}{5},\frac{2}{5}\right)$

son los puntos donde se cortan las gráficas, como se muestra en la Figura 6.5

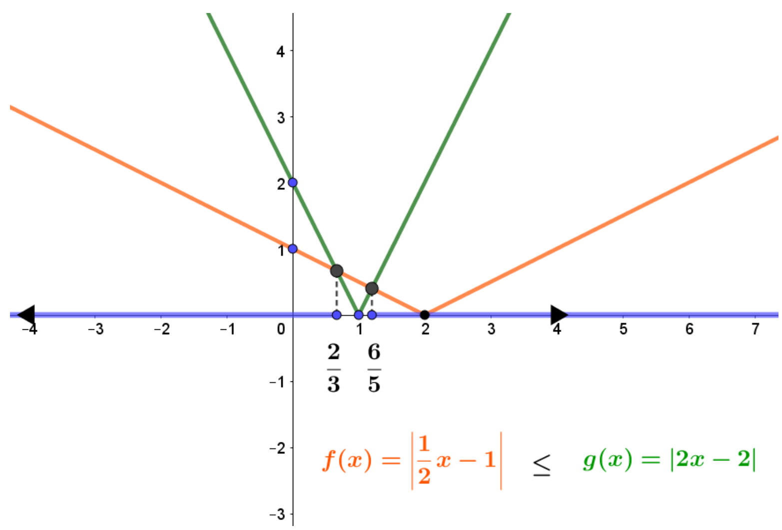


Figura 6. 5

Al observar la gráfica, se tiene que $f(x) \leq g(x)$, sí $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{5}, \infty\right)$, por lo que la solución de la inecuación $\left|\frac{1}{2}x - 1\right| \leq |2x - 2|$ es si $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{5}, \infty\right)$ (ver Figura 6.6).

Figura 6.6

Respuesta correcta: A)

3.3 Resolver la desigualdad $\left|\frac{1}{2}x - 1\right| \leq |2x - 2|$ por casos

A) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{5}, \infty\right)$

B) $\left(-\infty, -\frac{6}{5}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$

C) $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{5}, \infty\right)$

D) $\left(-\infty, -\frac{6}{5}\right] \cup \left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$

Solución:

Por un lado, se tiene

$$\left|\frac{1}{2}x - 1\right| \leq |2x - 2| \underset{\substack{\text{Si} \\ x \neq 1}}{\Rightarrow} \frac{\left|\frac{1}{2}x - 1\right|}{|2x - 2|} \leq 1 \underset{\substack{\text{Propiedad g) de} \\ \text{valor absoluto}}}{\Leftrightarrow} \left|\frac{\frac{1}{2}x - 1}{2x - 2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\frac{1}{2}(x-2)}{\frac{1}{2}(4x-4)}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x-2}{4x-4}\right| \leq 1$$

Como 1 no está en la solución de $\left|\frac{1}{2}x-1\right| \leq |2x-2|$, se tiene que la solución de está es equivalente a la solución de $\left|\frac{x-2}{4x-4}\right| \leq 1$

En lugar de usar la propiedad i), se resuelve por casos, como se muestra a continuación.

Hacemos un esquema del procedimiento:

Caso 1 Si la solución de $\frac{x-2}{4x-4} \geq 0$ es el conjunto A, con esta condición se tiene

$\left|\frac{x-2}{4x-4}\right| = \frac{x-2}{4x-4}$ y si la solución de $\frac{x-2}{4x-4} \leq 1$ es el conjunto B, por lo que la solución del primer caso sería $A \cap B$.

Caso 2 Si la solución de $\frac{x-2}{4x-4} < 0$ es el conjunto C, con esta condición se tiene

$\left|\frac{x-2}{4x-4}\right| = -\frac{x-2}{4x-4}$ y si la solución de $-\frac{x-2}{4x-4} \leq 1$ es el conjunto D, por lo que la solución del segundo caso sería $C \cap D$.

Por lo tanto, la solución es $(A \cap B) \cup (C \cap D)$.

Caso 1: Para encontrar el conjunto A resolvemos la desigualdad $\frac{x-2}{4x-4} \geq 0$

$$\frac{x-2}{4x-4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-4>0 \text{ y } x-2 \geq 0 \\ \text{ó} \\ 4x-4<0 \text{ y } x-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \text{ y } x \geq 2 \\ \text{ó} \\ x<1 \text{ y } x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1,\infty) \cap [2,\infty) = [2,\infty) \\ \text{ó} \\ x \in (-\infty,1) \cap (-\infty,2] = (-\infty,1] \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x \in (-\infty,1] \cup [2,\infty) = A}$$

Para encontrar el conjunto B resolvemos la desigualdad $\dfrac{x-2}{4x-4}\leq 1$

$$\frac{x-2}{4x-4}\leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\leq 4x-4 \text{ si } \underbrace{4x-4>0}_{x>1} & \text{por la propiedad de orden i)} \\ \text{ó} & \\ x-2\geq 4x-4 \text{ si } \underbrace{4x-4<0}_{x<1} & \text{por la propiedad de orden j)} \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\text{Propiedad g)}\\ \text{de orden}}}{\Rightarrow} \begin{cases} \left(2\leq 3x \underset{\substack{\text{Propiedad i)}\\ \text{de orden}}}{\Rightarrow} \dfrac{2}{3}\leq x\right) \quad \text{y } \ x>1 \\ \text{ó} \\ \left(2\geq 3x \underset{\substack{\text{Propiedad i)}\\ \text{de orden}}}{\Rightarrow} \dfrac{2}{3}\geq x\right) \quad \text{y } \ x<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\left[\dfrac{2}{3},\infty\right)\cap(1,\infty)=(1,\infty) \\ \text{ó} \\ x\in\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right]\cap(-\infty,1)=\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x\in\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup(1,\infty)=B}$$

Para el primer caso tenemos

$$x\in\left((-\infty,1]\cup[2,\infty)\right)\cap\left(\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup(1,\infty)\right)=\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup[2,\infty)$$

$$\Rightarrow \boxed{x\in\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup[2,\infty)=A\cap B}$$

Caso 2: Para encontrar el conjunto C resolvemos la desigualdad $\dfrac{x-2}{4x-4}<0$

$$\frac{x-2}{4x-4}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-4<0 \ \text{ y } \ x-2>0 \\ \text{ó} \\ 4x-4>0 \ \text{ y } \ x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \text{ y } \ x>2 \\ \text{ó} \\ x>1 \text{ y } \ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,1)\cap(2,\infty)=\varnothing \\ \text{ó} \\ x\in(1,\infty)\cap(-\infty,2)=(1,2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x\in(1,2)=C}$$

Para encontrar el conjunto D resolvemos la desigualdad $-\dfrac{x-2}{4x-4}\leq 1$

$$-\frac{x-2}{4x-4}<1 \Leftrightarrow \begin{cases} -(x-2)<4x-4 \text{ si } \underbrace{4x-4>0}_{x>1} & \text{por la propiedad de orden i)} \\ \text{ó} & \\ -(x-2)>4x-4 \text{ si } \underbrace{4x-4<0}_{x<1} & \text{por la propiedad de orden j)} \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\text{Propiedad g)}\\ \text{de orden}}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left(6\leq 5x \underset{\substack{\text{Propiedad i)}\\ \text{de orden}}}{\Rightarrow} \dfrac{6}{5}\leq x\right) \text{ y } x>1 \\ \text{ó} \\ \left(6\geq 5x \underset{\substack{\text{Propiedad i)}\\ \text{de orden}}}{\Rightarrow} \dfrac{6}{5}\geq x\right) \text{ y } x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left[\dfrac{6}{5},\infty\right)\cap(1,\infty)=\left[\dfrac{6}{5},\infty\right) \\ \text{ó} \\ x\in\left(-\infty,\dfrac{6}{5}\right]\cap(-\infty,1)=(-\infty,1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x\in(-\infty,1)\cup\left[\frac{6}{5},\infty\right)=D}$$

Para el segundo caso tenemos

$$x\in(1,2)\cap\left((-\infty,1)\cup\left[\frac{6}{5},\infty\right)\right)=\left((1,2)\cap(-\infty,1)\right)\cup\left((1,2)\cap\left[\frac{6}{5},\infty\right)\right)=\varnothing\cup\left[\frac{6}{5},2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x\in\left[\frac{6}{5},2\right)=C\cap D}$$

Por lo tanto, la solución de la desigualdad es

$$x\in(A\cap B)\cup(C\cap D)\Leftrightarrow x\in\left(\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup[2,\infty)\right)\cup\left[\frac{6}{5},2\right)\Rightarrow \boxed{x\in\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{6}{5},\infty\right)}.$$

(ver Figura 6.7).

Figura 6.7

Es claro que si usamos la propiedad i) de las desigualdades es más fácil, ver los casos en los que lo subdividimos

$$\left|\frac{x-2}{4x-4}\right| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \frac{x-2}{4x-4} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le \dfrac{x-2}{4x-4} \\ \text{y} \\ \dfrac{x-2}{4x-4} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -1(4x-4) \le x-2 \ \text{ y } \ 4x-4>0 \\ \text{ó} \\ -1(4x-4) \ge x-2 \ \text{ y } \ 4x-4<0 \end{cases} \\ \text{y} \\ \begin{cases} x-2 \le 1(4x-4) \ \text{ y } \ 4x-4>0 \\ \text{ó} \\ x-2 \ge 1(4x-4) \ \text{ y } \ 4x-4<0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{6}{5} \le x \ \text{ y } \ x>1 \\ \text{ó} \\ \dfrac{6}{5} \ge x \ \text{ y } \ x<1 \end{cases} \\ \text{y} \\ \begin{cases} \dfrac{2}{3} \le x \ \text{ y } \ x>1 \\ \text{ó} \\ \dfrac{2}{3} \ge x \ \text{ y } \ x<1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \in \left[\dfrac{6}{5}, \infty\right) \cap (1,\infty) = \left[\dfrac{6}{5}, \infty\right) \\ \text{ó} \\ x \in \left(-\infty, \dfrac{6}{5}\right] \cap (-\infty,1) = (-\infty,1] \end{cases} \\ \text{y} \\ \begin{cases} x \in \left[\dfrac{2}{3}, \infty\right) \cap (1,\infty) = (1,\infty) \\ \text{ó} \\ x \in \left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right] \cap (-\infty,1) = \left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right] \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty,1] \cup \left[\dfrac{6}{5}, \infty\right) \\ \text{y} \\ x \in \left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right] \cup (1,\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left((-\infty,1] \cup \left[\frac{6}{5}, \infty\right)\right) \cap \left(\left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup (1,\infty)\right) = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{5}, \infty\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{5}, \infty\right)$$

Respuesta correcta A)

3.4 Resolver la desigualdad $\left|\frac{1}{2}x-1\right| \le |2x-2|$, usando la continuidad de las funciones

A) $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{5},\infty\right)$

B) $\left(-\infty,-\frac{6}{5}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\infty\right)$

C) $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{5},\infty\right)$

D) $\left(-\infty,-\frac{6}{5}\right] \cup \left[-\frac{2}{3},\infty\right)$

Teorema del valor intermedio (8)
Suponemos que $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua en su dominio D_f, para cualquier intervalo $[a,b]$ contenido en D_f, se considera un número r entre los valores $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = r$

Nota: Los polinomios son continuos, composición de funciones continuas es continua y el valor absoluto es continuo.

Solución:

Si se considera el signo de desigualdad por uno de igualdad en la inecuación dada, se obtiene la ecuación $\left|\frac{1}{2}x-1\right| = |2x-2|$, y se resuelve la ecuación

$$\left|\frac{1}{2}x-1\right| = |2x-2| \underset{\substack{\text{Propiedad h)}\\ \text{de valorabsoluto}}}{\Rightarrow} \begin{cases} \frac{1}{2}x-1 = 2x-2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \\ \text{ó} \\ \frac{1}{2}x-1 = -(2x-2) \Rightarrow x = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Luego, estos valores dividen a la recta real en tres intervalos $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3},\frac{6}{5}\right)$ y $\left(\frac{6}{5},\infty\right)$ como se muestra en la Figura 6.8

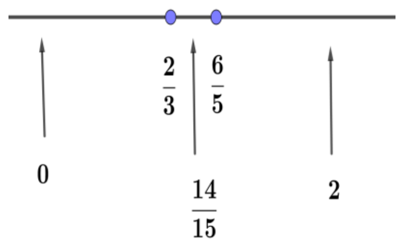


Figura 6. 8

Se tiene que **todos los números** de cada intervalo en que se dividió a la recta real deberán satisfacer la inecuación o **ningún número** la satisface, debido al teorema **(8)**, ya que la función $h(x)=\left|\frac{1}{2}x-1\right|-|2x-2|$ es continua en cada intervalo en la que se dividió la recta.

Si elegimos $0\in\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$ en el primer intervalo y sustituimos este valor en la inecuación $\left|\frac{1}{2}x-1\right|\leq|2x-2|$, se observa que $\left|\frac{1}{2}(0)-1\right|\leq|2(0)-2|\Rightarrow|-1|\leq|-2|$ se cumple, es decir, este número satisface a la inecuación, por lo tanto todos los números del intervalo $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$ están dentro la solución.

Se toma $\frac{14}{15}\in\left(\frac{2}{3},\frac{6}{5}\right)$ en el segundo intervalo y sustituimos este valor en la inecuación $\left|\frac{1}{2}x-1\right|\leq|2x-2|$, se observa que $\left|\frac{1}{2}\left(\frac{14}{15}\right)-1\right|\leq\left|2\left(\frac{14}{15}\right)-2\right|\Rightarrow\left|-\frac{8}{15}\right|\leq\left|-\frac{2}{15}\right|$ no se cumple, es decir, este número no satisface a la inecuación, por lo tanto ningún número del intervalo $\left(\frac{2}{3},\frac{6}{5}\right)$ puede estar en la solución.

Si elige $2\in\left(\frac{6}{5},\infty\right)$ en el tercer intervalo y sustituimos este valor en la inecuación $\left|\frac{1}{2}x-1\right|\leq|2x-2|$, se observa que $\left|\frac{1}{2}(2)-1\right|\leq|2(2)-2|\Rightarrow|0|\leq|2|$ se cumple, es decir, este número satisface a la inecuación, por lo tanto todos los números del intervalo $\left(\frac{6}{5},\infty\right)$ están dentro la solución.

Como también los números $\frac{2}{3}$ y $\frac{6}{5}$ satisfacen la inecuación, se tiene que la solución es $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{6}{5},\infty\right)$.

Respuesta correcta A)

AUTOEVALUACIÓN

Situación 4. Inecuaciones cuadráticas.

4.1 La solución de la inecuación $x^2 + x - 2 > 0$ es

A) $(-\infty,-2] \cup [1,\infty)$

B) $(-2,1)$

C) $[-2,1]$

D) $(-\infty,-2) \cup (1,\infty)$

4.2 La solución de la inecuación $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$ es

A) $\varnothing$

B) $(-\infty,\infty)$

C) $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},\infty\right)$

D) $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$

4.3 La solución de la inecuación $x^2 - 2x + 3 < 0$ es

A) $\varnothing$

B) $(-\infty,\infty)$

C) $(-\infty,1) \cup (1,\infty)$

D) $[2,\infty)$

4.4 Resolver la desigualdad $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ por un método gráfico

A) $(-\infty,1) \cup (3,\infty)$

B) $(-\infty,1] \cup [3,\infty)$

C) $(1,3)$

D) $[1,3]$

BIBLIOGRAFÍA

Cárdenas, H., LLuis, E., Raggi, F. y Tomás, F. (2007). *Álgebra Superior*. México: Trillas.

De Oteyza, E., Lam E., Hernández C. y Carrillo Ángel. (2016). *Temas Selectos de Matemáticas*. México: Pearson Educación.

Lehmann, C. (2008). *Álgebra.* México: Limusa

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Cengage Learning.

MODELO DE EXAMEN EXTRAORDINARIO

Situación 1. Operando conjuntos.

Sean A, B conjuntos tales que $A \cap B = A$.

1.1 Calcula la unión $A \cup B$ **[1 punto]**

A) A
B) A^c
C) B
D) B^c

1.2 El resultado de $A - B$ es **[1 punto]**

A) A
B) B^c
C) A^c
D) $\varnothing$

1.3 Calcula $A^c \cup B^c$, donde el complemento se toma en un conjunto U que contiene a A y B. **[2 puntos]**

A) $\varnothing$
B) B^c
C) A^c
D) $A^c \cap B^c$

1.4 Calcula $(A - B) \cup (B - A)$. **[3 puntos]**

A) B^c
B) $B - A$
C) $A - B$
D) A^c

Situación 2. Números enteros.

Una propiedad de los números enteros es la siguiente:

$\mathcal{P}$: *Todo número entero tiene algún divisor*

1.2 La proposición $\mathcal{P}$ escrita en lenguaje analítico es: **[1 punto]**

A) Existe w tal que para todo z, si es número entero entonces w es divisor de z
B) Existe w tal que para todo z, si z es número entero entonces z es divisor de w
C) Para todo z, si z es número entero entonces existe w tal que w es divisor de z
D) Para todo z, z es número y existe w tal que w es divisor de z

1.3 La negación de la proposición $\mathcal{P}$ escrita en lenguaje analítico es: **[3 puntos]**

A) Para todo w, existe z tal que z si es número entero y w no es divisor de z
B) Para todo w, existe z tal que z es número entero y z no es divisor de w
C) Existe z tal que z es número entero y para todo w, w no es divisor de z
D) Existe z tal que z es número y no existe w tal que w no es divisor de z

1.4 La negación de la proposición $\mathcal{P}$ escrita en lenguaje coloquial es: **[2 puntos]**

A) Ningún número entero tiene divisores
B) Ningún número entero no es divisible
C) Algún número entero no tiene divisores
D) Algún número entero es divisible

1.5 Suponiendo que la proposición $\mathcal{P}$ es verdadera, y puesto que 0 y 4 son números enteros, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta? **[2 puntos]**

A) Existe w tal que w es divisor de 4
B) Existe w tal que 0 es divisor de w
C) Para todo w, w es divisor de 4
D) Para todo w, 0 es divisor de w

Situación 3. Demostración por casos.

La siguiente es una demostración (en la que se han omitido algunos argumentos) de que $A^C \cup B^C \subset (A \cap B)^c$, es decir:

Si $x \in A^C \cup B^C$ entonces $x \in (A \cap B)^c$

Demostración

(1) $x \in A^C \cup B^C$ Hipótesis

(2) $x \in A^C$ ó $x \in B^C$ -------------- --------------

(3) Si $x \in A^C$ entonces $x \in (A \cap B)^c$:

- (a) $x \in A^C$ Hipótesis de (3)
- (b) $x \notin A$ (a) Definición de complemento
- (c) $x \notin A$ ó $x \notin B$ -------------- -----------------
- (d) $x \notin A \cap B$ -------------- -----------------
- (e) $x \in (A \cap B)^c$ (d) Definición de complemento

(4) Si $x \in B^C$ entonces $x \in (A \cap B)^c$:

- (a) $x \in B^C$ Hipótesis de (4)
- (b) $x \notin B$ (a) Definición de complemento
- (c) $x \notin A$ ó $x \notin B$ --------------- ------------------
- (d) $x \notin A \cap B$ ----------------- ---------------------
- (e) $x \in (A \cap B)^c$ (d) Definición de complemento

(5) $x \in (A \cap B)^c$ --------------- ------------------

3.1 El argumento que explica porque el paso (2) es: **[1 punto]**

A) De la disyunción a la parte
B) Definición de unión
C) Definición de complemento
D) De la parte a la disyunción

3.2 La argumentación del paso (c) es: **[3 puntos]**

A) (b) De la disyunción a la parte
B) (b) De la parte a la disyunción
C) (b) Definición de complemento
D) (b) Definición de unión, girada

3.3 La argumentación del paso (d) es: **[2 puntos]**

A) (c) Definición de intersección, girada
B) (c) Definición de disyunción, girada
C) (c) De la disyunción a la parte
D) (c) De la parte a la intersección

3.4 La argumentación del paso (5) es: **[2 puntos]**

A) (4) y (5) Por casos
B) (3), (4) y (5) Por casos
C) (e) De lo idéntico
D) (d) Definición de complemento

Situación 4. Entrevista con un director.

En una preparatoria, un grupo de sexto grado de 30 alumnas y 20 alumnos solicita una audiencia al director de la escuela, quien decide entrevistarse con un comité de seis integrantes que represente al grupo.

4.1 Si en el comité deben estar el jefe y el subjefe de grupo ¿de cuántas maneras es posible formar un comité? **[1 punto]**

A) 10182480
B) 50063860
C) 194580
D) 487635

4.2 Si en el comité que hablará con el director sólo debe haber mujeres, ¿cuántos comités se pueden formar? **[2 puntos]**

A) 12271512
B) 4060
C) 24360
D) 593775

4.3 Si el jefe de grupo es varón y si deben estar el jefe del grupo y exactamente tres alumnas ¿cuántas formas hay de elegir un comité? **[2 puntos]**

A) 462840
B) 694260
C) 1906884
D) 24360

4.4 Si el día de la audiencia los asistentes se anotan en una lista, y asiste la mitad de los hombres y la tercera parte de las mujeres del grupo, ¿de cuántas formas pudieron haber quedado escritos los seis primeros nombres en la lista? **[3 puntos]**

A) 38760
B) 14400
C) 27907200
D) 907200

Situación 5. Números complejos con el mismo módulo.

5.1 Si $z = 3 + 4i$ ¿cuál es módulo de $\frac{1}{z}$? **[1 punto]**

A) 5
B) $\frac{1}{5}$
C) $\sqrt{5}$
D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

5.2 Si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, tal que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$ ¿Qué característica cumplen los números z y $\frac{1}{z}$?

A) Están en una hipérbola
B) Están en la circunferencia
C) Están en una parábola
D) Están en una elipse

5.3 ¿Qué números complejos z cumplen $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1 - z|$? **[2 puntos]**

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$
B) $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$
C) $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
D) $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

5.4 ¿Cuántas raíces cúbicas de -1, distintas de -1 cumplen $|w| = \left|\frac{1}{w}\right| = |1 - w|$?

[3 puntos]

A) No hay ninguna
B) Hay dos
C) Hay una
D) Hay tres

Situación 6. El cine y número de hijos de una pareja.

Una pareja decide ir al cine con sus hijos y tiene 3 opciones para ver la misma película, en Cinema1, Cinema2 o en la Cineteca Nacional, pero tiene un presupuesto de $ 500.

6.1 Si la entrada a la función de Cinema1 tiene un costo de $ 97 por persona y el de Cinema2 es de $ 76, para el Cinema1 no le alcanza, pero en Cinema2 sí, ¿cuántos hijos tiene la pareja? **[1 punto]**

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6

6.2 Si todos los hijos de la pareja son menores de 12 años, y el costo de la entrada para menores de 12 años en Cinema1 es de $ 70 y en Cinema2 es de $ 60, pero en Cinema1 no le alcanza, y en Cinema2 sí, ¿cuántos niños tiene la pareja? **[2 puntos]**

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6

6.3 Si el costo de la entrada en la Cineteca Nacional es de $ 65 para los adultos y de $ 50 para los niños, pero tiene que pagar un costo de estacionamiento $ 100.

No le alcanza para ir a Cinema1, aunque no pague estacionamiento y en la Cineteca Nacional si le alcanza, ¿cuántos niños tiene la pareja? **[2 puntos]**

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6

6.4 En Cinema2 no le alcanza, aunque no pague estacionamiento, pero en la Cineteca Nacional si le alcanza reduciendo el estacionamiento a $50, ¿cuántos hijos tiene la pareja? **[2 puntos]**

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6

RESPUESTAS AL EXAMEN TIPO EXTRAORDINARIO

TEMAS SELECTOS DE MATEMÁTICAS. 1710	
Reactivo	Respuesta correcta
1.1	C)
1.2	D)
1.3	C)
1.4	B)
2.1	C)
2.2	C)
2.3	C)
2.4	A)
3.1	B)
3.2	B)
3.3	A)
3.4	B)
4.1	C)
4.2	D)
4.3	B)
4.4	C)
5.1	B)
5.2	B)
5.3	D)
5.4	B)
6.1	B)
6.2	C)
6.3	C)
6.4	D)

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE AUTOEVALUACIÓN

Respuestas a los problemas de autoevaluación. Unidad 1.

4.1	4.2	4.3	4.4
B)	D)	C)	B)

Respuestas a los problemas de autoevaluación. Unidad 2.

51	5.2	5.3	5.4
B)	B)	D)	D)

Respuestas a los problemas de autoevaluación. Unidad 3.

5.1	5.2	5.3	5.4	6.1	6.2	6.3	6.4
C)	B)	D)	B)	D)	A)	C)	A)

Respuestas a los problemas de autoevaluación. Unidad 4.

4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
D)	B)	A)	B)	C)

Respuestas a los problemas de autoevaluación. Unidad 5.

4.1	4.2	4.3	4.4
B)	C)	D)	A)

Respuestas a los problemas de autoevaluación. Unidad 6.

4.1	4.2	4.3	4.4
D)	B)	A)	C)

NOTAS

NOTAS

UNAM

Dr. Enrique Graue Wiechers
Rector

Dr. Leonardo Lomelí Vanegas
Secretario General

Dr. Alberto Ken Oyama Nakagawa
Secretario de Desarrollo Institucional

Ing. Leopoldo Silva González
Secretario Administrativo

Dra. Mónica González Contró
Abogada General

DGENP

Biól. María Dolores Valle Martínez
Directora General

Lic. Jaime Cortés Vite
Secretario General

M. en C. María Josefina Segura Gortares
Secretaria Académica

Lic. José Luis Sánchez Varela
Secretario Administrativo

M. en C. Ana Laura Gallegos y Téllez Rojo
Secretaria de Planeación

Q.F.B. Roberta Ma. del Refugio Orozco Hernández
Secretaria de Difusión Cultural

M. en D. Martha Patricia Rodríguez Rosas
Jefa del Departamento de Matemáticas

Directores de Planteles

Lic. Enrique Espinosa Terán
Plantel 1 "Gabino Barreda"

Lic. Isabel Jiménez Téllez
Plantel 2 "Erasmo Castellanos Quinto"

Lic. Samuel David Zepeda Landa
Plantel 3 "Justo Sierra"

Mtro. Eduardo Adolfo Delgadillo Cárdenas
Plantel 4 "Vidal Castañeda y Nájera"

Mtra. Velia Carrillo García
Plantel 5 "José Vasconcelos"

Mtro. Isauro Figueroa Rodríguez
Plantel 6 "Antonio Caso"

I.Q. María del Carmen Rodríguez Quilantán
Plantel 7 "Ezequiel A. Chávez"

Arq. Ángel Huitrón Bernal
Plantel 8 "Miguel E. Schulz"

Q.F.B. Gabriela Martínez Miranda
Plantel 9 "Pedro de Alba"