GUÍA DE ESTUDIO DE MATEMÁTICAS IV

BACHILLERATO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Dirección General de la Escuela Nacional Preparatoria
Colegio de Matemáticas
Jefatura de Producción Editorial de la ENP

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

COLEGIO DE MATEMÁTICAS

Cuarto año   Clave 1400   Plan 1996

MATEMÁTICAS IV
Guía cuaderno de trabajo académico

Programa Actualizado

Aprobado por H. Consejo Técnico el 13 de abril 2018

Bachillerato

Coordinación y revisión
Martha Patricia Rodríguez Rosas

Autores
Nora Cecilia Chávez Pérez
Ulises David Martínez Colula
Giselle Ochoa Hofmann
Jorge Ramírez González
Ernesto Ramírez Sánchez
Norma Ramírez Sánchez
Raquel Sánchez Pérez
Marisol Sandoval Rosas
Remedios Soriano Velasco

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
2020

Escuela Nacional Preparatoria
Dirección Genera: Biól. María Dolores Valle Martínez
Secretaria Académica: M. en C. María Josefina Segura Gortares
Departamento de Producción Editorial: Lic. María Elena Jurado Alonso

Diseño de Portada: DCG Edgar Rafael Franco Rodríguez
Diseño editorial: M. en D. Martha Patricia Rodríguez Rosas
Corrección de estilo: M. en D. Martha Patricia Rodríguez Rosas
Cuidado de edición: Jonathan Iván Jiménez Castellanos
Diseño de imagen Elizabeth Ramírez Ochoa

Primera edición: febrero, 2020

Impreso en México.

PRESENTACIÓN

La Escuela Nacional Preparatoria, institución educativa con más de 150 años de experiencia formando jóvenes en el nivel medio superior, busca la constante actualización y mejora de sus materiales de apoyo a la docencia, así como la publicación de nuevos ejemplares, siempre teniendo en mente a nuestros alumnos y su aprovechamiento.

Después de varios años de trabajo, reflexión y discusión, se lograron dar dos grandes pasos: la actualización e implementación de los programas de estudios de bachillerato y la publicación de la nueva colección de Guías de Estudio. Sin embargo, los trabajos, resultado del espíritu crítico de los profesores, siguen dando fruto con publicaciones constantes de diversa índole, siempre en torno a nuestro quehacer docente y a nuestros programas actualizados.

Ciertamente, nuestra Escuela Nacional Preparatoria es una institución que no se detiene, que avanza con paso firme y constante hacia su excelencia académica, así como preocupada y ocupada por la formación integral, crítica y con valores de nuestros estudiantes, lo que siempre ha caracterizado a nuestra Universidad Nacional.

Aún nos falta más por hacer, por mejorarnos cada día, para que tanto nuestros jóvenes estudiantes como nuestros profesores seamos capaces de responder a esta sociedad en constante cambio y a la Universidad Nacional Autónoma de México, la Universidad de la Nación.

"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
BIÓL. MARÍA DOLORES VALLE MARTÍNEZ
DIRECTORA GENERAL
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

INTRODUCCIÓN

La guía de **Matemáticas IV** tiene como objetivo *brindar los contenidos básicos necesarios para presentar el examen extraordinario* acorde a los propósitos y enfoque principal del programa de esta asignatura.

El propósito de la asignatura de Matemáticas IV es que los estudiantes desarrollen sus capacidades de abstracción, generalización, comunicación matemática y razonamiento lógico mediante el análisis y la resolución de problemas contextualizados a partir de la construcción de modelos aritméticos, algebraicos y geométricos. En este sentido, la presente guía se basa en el análisis de situaciones contextualizadas que permiten que el alumno transite entre los contenidos y las habilidades de razonamiento para la resolución de las mismas. Los conceptos y procesos surgen como una necesidad para dar respuesta a cada interrogante planteada.

En la *Unidad 1, Los números reales para contar, comparar y medir*, las situaciones pretenden desarrollar habilidades de razonamiento lógico y el uso de los números reales en diferentes contextos.

La *Unidad 2, Expresiones algebraicas para describir y generalizar,* tiene como objetivo que los alumnos mediante la representación de diversos fenómenos o eventos a través de expresiones algebraicas desarrollen sus habilidades de abstracción y generalización.

La *Unidad 3, Ecuaciones de primer y segundo grado para modelar condiciones específicas de una función,* permite a través de las situaciones contextualizadas plantear ecuaciones con una incógnita para representar e interpretar la solución de fenómenos que se modelen mediante funciones lineales o cuadráticas.

La *Unidad 4, Sistemas de ecuaciones para modelar condiciones simultaneas*, presenta situaciones contextualizadas que muestran la utilidad de los modelos lineales en dos y tres variables para representar diversos fenómenos.

La *Unidad 5, Inecuaciones para modelar restricciones*, permite analizar situaciones problemáticas bajo ciertas restricciones, interpretar y validar los resultados mediante modelos gráficos y algebraicos de inecuaciones o sistemas de inecuaciones.

La Guía de estudios de Matemáticas IV, presenta en cada unidad el objetivo específico señalado en el programa de estudios, además de situaciones para introducir los contenidos, actividades de autoevaluación, referencias bibliográficas y un modelo de examen.

Es importante enfatizar que la guía pretende brindar algunos recursos que sirvan como modelo para preparar a los alumnos en la presentación del examen, por esta razón se trabaja con situaciones contextualizadas, de las que se derivan cuatro o más preguntas de opción múltiple, tal como en los exámenes extraordinarios. La presente guía no es un libro de texto, se aconseja revisar la bibliografía sugerida en cada unidad a fin de tener una mejor preparación.

ÍNDICE PÁG.

UNIDAD I. LOS NÚMEROS REALES PARA CONTAR, COMPARAR Y MEDIR

Objetivo

El alumno:

Desarrollará habilidades de razonamiento lógico al: cuantificar fenómenos o eventos a través de modelos gráficos y aritméticos que involucren la resolución de operaciones con números reales usando procedimientos diversos y aplicando las propiedades pertinentes; analizar los factores que intervienen en un fenómeno para compararlos con estándares nacionales y/o mundiales y fundamentar una opinión; describir (verbalmente y por escrito) gráficas de diversas fuentes (científicas, de divulgación, de medios masivos de comunicación), interpretarlas y argumentar una conclusión y/o una postura personal.

Situación 1. Precios de un celular

La Tabla 1.1 muestra el precio de un celular iPhone X Gris Espacial, en ocho tiendas distintas.

Tabla 1.1 Precios de un celular

Tienda	Precio
1	$15,600.00
2	$16,949.00
3	$15,999.00
4	$15,949.00
5	$15,999.00
6	$15,600.00
7	$15,999.00
8	$15,995.00

1.1 ¿Qué valor tiene la moda en los precios del celular?

A) $15,999.00

B) $15,600.00

C) $15,949.00

D) $16,949.00

Medidas de tendencia central

Las medidas de tendencia central en Estadística son valores que se calculan a partir de un conjunto de datos, permitiendo realizar inferencias sobre la naturaleza de la población en cuestión. Las medidas centrales más utilizadas son la **Media aritmética**, la **Mediana** y la **Moda**.

Moda

La **moda** se define como el valor o clase que tiene mayor frecuencia (el valor del dato que más se repite) en un conjunto de observaciones

Solución:

Dado que la moda es el valor del dato que más se repite, entonces, el valor de la moda en los precios de los celulares es $\$15,999.00$ ya que es el precio del celular en tres tiendas.

Respuesta correcta: A) $\$15,999.00$

1.2 ¿Cuál es la mediana en los precios del celular?

A) $\$17,997.00$

B) $\$15,997.00$

C) $\$17,999.00$

D) $\$15,600.00$

Mediana

La mediana es conocida como una medida de posición, ya que es el valor central en un conjunto de datos ordenados. Para obtenerla se necesita ordenar los datos ya sea de menor a mayor o viceversa.
Cuando hay una cantidad impar de datos, la mediana es el valor central de ellos. Para calcular su posición se aplica la siguiente expresión.

$$Posición\, de\, la\, Mediana : \frac{n+1}{2}$$

Donde n es el total de datos.

Por ejemplo, se tienen los siguientes datos: $7, 3, 2, 8, 10, 4, 6, 7, 5$

Ordenando de menor a mayor (en orden ascendente): $2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 10$

Utilizando la expresión para calcular la posición del valor de la mediana se tiene:

$$Posición\,de\,la\,Mediana: \frac{9+1}{2}$$

Por tanto, la mediana es el valor que ocupa el quinto lugar, es decir, la mediana es 6.

Cuando la cantidad de los datos es par se suman los valores de los datos centrales y esta suma se divide entre dos.

Ejemplo, se tiene los siguientes 6 datos: $2, 4, 6, 8, 9, 11$

Obteniendo la mediana con la expresión:

$$Mediana = \frac{6+8}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Así que el valor de la mediana de los datos es 7.

Solución:

Para obtener la mediana es necesario ordenar los datos ya sea de menor a mayor o viceversa. En esta situación ordenamos los precios de menor a mayor.

$$\$15\ 600.00,\ \$15\ 600.00,\ \$15\ 949.00,\ \$15\ 995.00,$$
$$\$15\ 999.00,\ \$15\ 999.00,\ \$15\ 999.00,\ \$16\ 949.00$$

Observamos que la cantidad de datos es par (ocho datos), entonces para obtener la mediana de los precios vamos a sumar los valores de los dos datos centrales y dividir la suma entre dos.

$$Mediana = \frac{15,995.00 + 15,999.00}{2} = 15,997.00$$

Por tanto, la mediana de los precios es $\$15,997.00$

La respuesta correcta es: B) $\$15\ 997.00$

1.3 ¿Cuál es el precio promedio del celular?

A) $\$16\ 011.25$

B) $\$16\ 949.00$

C) $\$15\ 011.25$

D) $\$15\ 999.00$

Media aritmética

La media aritmética (media o promedio) para datos no agrupados, es la suma de los valores de todas las observaciones (datos) dividida entre el número total de datos, simbólicamente esto es

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Donde $\sum_{i=1}^{n}$ indica que se realizará la suma del primero hasta el último de los datos, x_i representa cada uno de los datos a sumar y el subíndice i indica la posición del dato.

Solución:

Para obtener la Media (promedio) de los precios, vamos a realizar la suma de todos los precios y dividir la suma entre 8 que es la cantidad total de datos.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8}$$

$$\overline{X} = \frac{15,600.00+15,600.00+15,949.00+15,995.00+15,999.00+15,999.00+15,999.00+16,949.00}{8}$$

$$\overline{X} = \frac{128,090.00}{8} = 16,011.25$$

Por tanto, el precio promedio del celular es de $\$16\ 011.25$

La respuesta correcta es: A) $\$16\ 011.25$

1.4 Si Jorge tiene ahorrado $10,000.00 y sus padres deciden apoyar la compra del celular ¿Cuál es la cantidad de dinero que debe pedirles para alcanzar el costo promedio?

A) $\$5,997.00$

B) $\$5,999.00$

C) $\$6,011.25$

D) $\$6,999.25$

Solución:

Como el costo promedio es el valor de la media aritmética: $\overline{X} = 16,011.25$ (reactivo1.3), entonces, Jorge debe pedirles a sus padres $\$16\ 011.25 - \$10,000.00 = \$6,011.25$

La respuesta corecta es el inciso C) $\$6,011.25$

Situación 2. Pesos de 20 estudiantes

Los siguientes datos son los pesos en kilogramos de un grupo de 20 estudiantes de la ENP número 8

$$50.00, 52.00, 52.00, 53.00, 53.00, 54.00, 54.00, 54.00, 55.00, 55.00,$$
$$55.00, 55.00, 56.00, 56.00, 56.00, 56.00, 56.00, 57.00, 57.00, 57.00$$

2.1 La Tabla de distribución de frecuencias absolutas de los datos anteriores es:

A)

Peso en kilogramos de los alumnos	Frecuencia
50.00	1
52.00	2
53.00	2
54.00	3
55.00	4
56.00	5
57.00	3
Total	20

B)

Peso en kilogramos de los alumnos	Frecuencia
50.00	1
52.00	3
53.00	5
54.00	8
55.00	12
56.00	17
57.00	20
Total	66

C)

Peso en kilogramos de los alumnos	Frecuencia
50.00	20
52.00	17
53.00	12
54.00	8
55.00	5
56.00	3
57.00	1
Total	66

D)

Peso en kilogramos de los alumnos	Frecuencia
50.00	3
52.00	5
53.00	4
54.00	3
55.00	2
56.00	2
57.00	1
Total	20

Tabla de distribución de frecuencias

La distribución de frecuencias es la forma más común de organizar los datos. Es una tabla que presenta el número de elementos que pertenecen a cada una de las clases o categorías en las que se haya dividido para su estudio el grupo de datos

Frecuencia absoluta

Es el número de veces que se repite un determinado valor (x_i) de los datos. Simbólicamente se representa como $f.a$

La suma de las frecuencias absolutas es el total de datos.

Solución:

Se realiza una tabla en cuya primera columna se colocan los pesos (en orden) de los alumnos y en la segunda columna el número de veces que se repite cada peso, por tanto, la Tabla 1.2 muestra la frecuencia absoluta de los datos.

Tabla 1.2 Frecuencia absoluta de los pesos

Peso en kilogramos de los alumnos	$f.a$
50.00	1
52.00	2
53.00	2
54.00	3
55.00	4
56.00	5
57.00	3
Total	20

La respuesta correcta es el inciso A)

2.2 ¿Cuál es la frecuencia relativa de los pesos de los alumnos?

A)

Peso en kilogramos de los alumnos	$f.r = \frac{f.a}{n}$
50.00	0.05
52.00	0.10
53.00	0.10
54.00	0.15
55.00	0.20
56.00	0.25
57.00	0.15
Total	1

B)

Peso en kilogramos de los alumnos	$f.r = \frac{f.a}{n}$
50.00	0.15
52.00	0.25
53.00	0.20
54.00	0.15
55.00	0.10
56.00	0.10
57.00	0.05
Total	1

C)

Peso en kilogramos de los alumnos	$f.r = \frac{f.a}{n}$
50.00	0.10
52.00	0.20
53.00	0.20
54.00	0.30
55.00	0.40
56.00	0.50
57.00	0.30
Total	2.0

D)

Peso en kilogramos de los alumnos	$f.r = \frac{f.a}{n}$
50.00	0.30
52.00	0.50
53.00	0.40
54.00	0.30
55.00	0.20
56.00	0.20
57.00	0.10
Total	2.0

Frecuencia relativa

Es el cociente de la frecuencia absoluta de un determinado valor y el número total de datos.
Simbólicamente se representa como

$$f.r = \frac{f.a}{n}$$

La suma de las frecuencias relativas es 1.

Solución:

Dado que la frecuencia relativa es el cociente de la frecuencia absoluta entre el total de datos, la Tabla 1.3 muestra la forma de calcularla.

Tabla 1.3 frecuencia relativa de los pesos

Peso en kilogramos de los alumnos	$f.a$	$f.r = \frac{f.a}{n}$
50.00	1	$\frac{1}{20} = 0.05$
52.00	2	$\frac{2}{20} = 0.10$
53.00	2	$\frac{2}{20} = 0.10$
54.00	3	$\frac{3}{20} = 0.15$
55.00	4	$\frac{4}{20} = 0.20$
56.00	5	$\frac{5}{20} = 0.25$
57.00	3	$\frac{3}{20} = 0.15$
Total	20	1

La respuesta correcta es el inciso A):

Peso en kilogramos de los alumnos	$f.r = \frac{f.a}{n}$
50.00	0.05
52.00	0.10
53.00	0.10
54.00	0.15
55.00	0.20
56.00	0.25
57.00	0.15
Total	1

2.3 ¿Cuál de las siguientes tablas representa la frecuencia relativa porcentual de los datos?

A)

Peso en kilogramos de los alumnos	$f.r = \frac{f.a}{n}(100)$
50.00	0.05
52.00	0.10
53.00	0.10
54.00	0.15
55.00	0.20
56.00	0.25
57.00	0.15
Total	1.00

B)

Peso en kilogramos de los alumnos	$f.r = \frac{f.a}{n}(100)$
50.00	5
52.00	10
53.00	10
54.00	15
55.00	20
56.00	25
57.00	15
Total	100

C)

Peso en kilogramos de los alumnos	$f.r = \frac{f.a}{n}(100)$
50.00	50
52.00	100
53.00	100
54.00	150
55.00	200
56.00	250
57.00	150
Total	1000

D)

Peso en kilogramos de los alumnos	$f.r = \frac{f.a}{n}(100)$
50.00	15
52.00	25
53.00	20
54.00	15
55.00	10
56.00	10
57.00	5
Total	100

Frecuencia relativa porcentual

Es el cociente de la frecuencia absoluta de un determinado valor entre el número total de datos (frecuencia relativa) multiplicada por 100, se representa en tantos por ciento.

Simbólicamente se representa como:

$$f.r = \frac{f.a}{n}(100)$$

La suma de las frecuencias relativas es el 100%

Solución:

Puesto que la frecuencia relativa porcentual es la frecuencia relativa multiplicada por 100, entonces, así la Tabla 1.4 da cuenta de cómo determinar la frecuencia relativa porcentual para los pesos de los 20 alumnos.

Tabla 1.4 Frecuencia porcentual de los pesos

Peso en kilogramos de los alumnos	$f.a$	$f.r = \frac{f.a}{n}$	$f.r = \frac{f.a}{n}(100)$
50.00	1	$\frac{1}{20} = 0.05$	$0.05(100) = 5$
52.00	2	$\frac{2}{20} = 0.10$	$0.10(100) = 10$
53.00	2	$\frac{2}{20} = 0.10$	$0.10(100) = 10$
54.00	3	$\frac{3}{20} = 0.15$	$0.15(100) = 15$
55.00	4	$\frac{4}{20} = 0.20$	$0.20(100) = 20$
56.00	5	$\frac{5}{20} = 0.25$	$0.25(100) = 25$
57.00	3	$\frac{3}{20} = 0.15$	$0.15(100) = 15$
Total	20	1	100

La respuesta correcta es el inciso B)

Peso en kilogramos de los alumnos	$f.r = \frac{f.a}{n}(100)$
50.00	5
52.00	10
53.00	10
54.00	15
55.00	20
56.00	25
57.00	15
Total	100

2.4 ¿Cuál es la gráfica de barras que representa la relación entre el peso y el número de alumnos?

A)

B)

C)

D)

Grafica o diagrama de barras

Es una forma de representar la información cuantitativa o cualitativa, por medio de columnas o barras en el eje horizontal o vertical, la altura de las barras o columnas es proporcional a la frecuencia absoluta o relativa de cada dato.

Solución:

Para obtener la gráfica de barras se grafican los datos que se encuentran en la tabla de frecuencia absoluta (Tabla 1.5), así la gráfica de barra se representa como en la Figura 1.1, donde la altura de las barras representa la frecuencia de los pesos en kilogramos que se observan en el eje horizontal.

Tabla 1.5 Frecuencia absoluta de los pesos

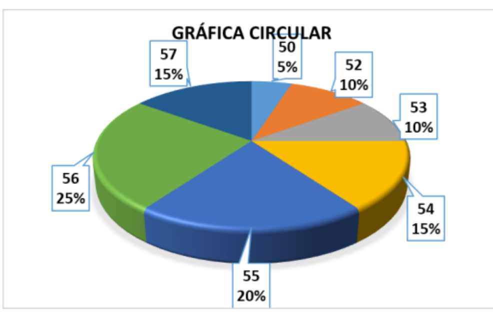
Peso en kilogramos de los alumnos	$f.a$
50.00	1
52.00	2
53.00	2
54.00	3
55.00	4
56.00	5
57.00	3
Total	20

Figura 1.1

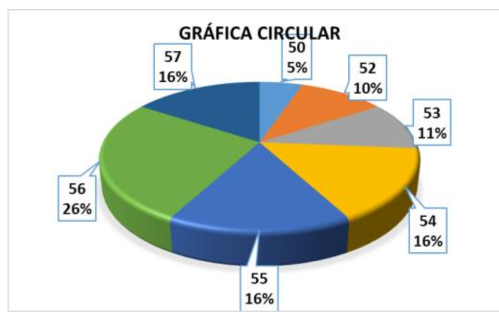
La respuesta correcta es el inciso A) (Figura 1.1)

2.5¿Cuál es la gráfica circular (de sectores o de pastel) que corresponde a los datos?

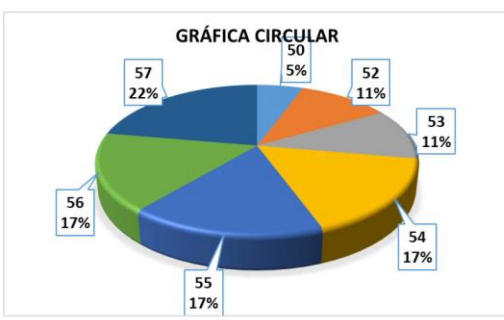
A)



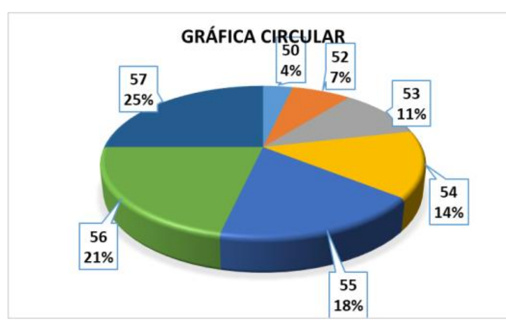
B)



C)



D)



Gráfica circular

La gráfica circular, de sectores o de pastel, está representada por un círculo dividido en sectores. Se usa para mostrar cómo una cantidad total se reparte en sectores de diferente tamaño que representan la frecuencia relativa porcentual de cada dato.

Solución:

Dada la descripción de lo que es una gráfica circular y su relación con la frecuencia relativa porcentual:

Peso en kilogramos de los alumnos	$f.r = \frac{f.a}{n}(100)$
50.00	5
52.00	10
53.00	10
54.00	15
55.00	20
56.00	25
57.00	15
Total	100

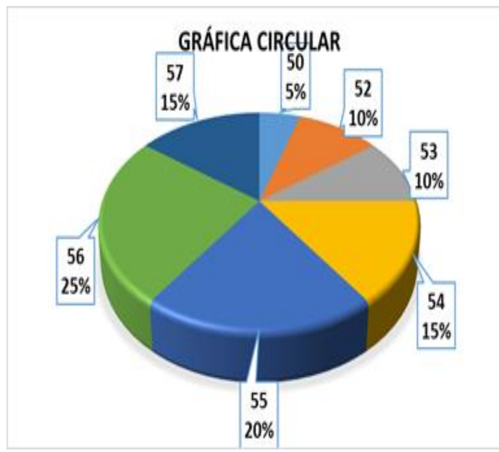


Figura 1.2

La respuesta correcta es el inciso A) (Figura 1.2)

2.6 ¿Cuál es el rango de los datos?

A) 50
B) 7 -
C) 3
D) 57

Rango

El rango se calcula por medio de la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de los datos. Esto es:

$$Rango = valor\ máximo - valor\ mínimo$$

Solución:

Para calcular el rango de los datos de los pesos, primero se necesita ordenar los datos, ya sea en forma ascendente o descendente, para distinguir el valor máximo y mínimo, y calcular la diferencia entre ellos.
Así, el rango está dado por:

$$Rango = 57 - 50 = 7$$

La respuesta correcta es B) 7

2.7 En la Figura 1.3¿A cuántos grados equivale el ángulo del sector circular de 25%?

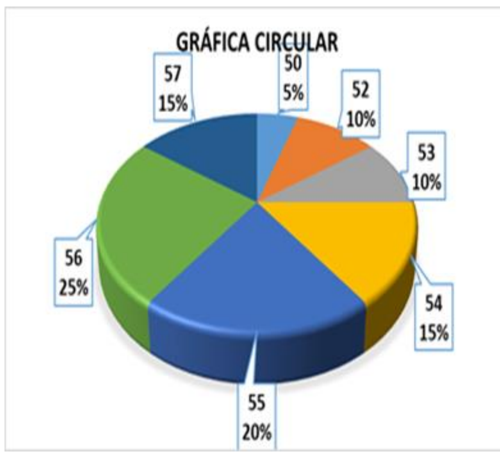


Figura 1.3

A) $56°$
B) $25°$
C) $90°$
D) $95°$

¿Esto para qué sirve?

Cálculo del ángulo de un sertor circular

Un círculo completo por muy grande o pequeño que sea, tiene $360°$ y su área presenta el 100% de la información. A cada porcentaje de la frecuencia relativa porcentual se le asigna cierta cantidad en grados. Por ejemplo, para convertir 6.5% en grados se lleva a cabo lo siguiente:

$$\frac{6.5}{100} \times 360° = 0.065 \times 360° = 23.40°$$

Así 6.5% corresponde a $23.40°$

Solución:

De acuerdo con la teoría anterior sobre la gráfica circular:

$$25\% = \frac{25}{100} \times 360° = 0.25 \times 360° = 90°$$

La respuesta correcta es el inciso C) $90°$

2.8 ¿Cuál es el número de intervalos de clase para los datos de los pesos de los 20 niños?

A) 4
B) 7
C) 2
D) 3

Esto en qué es útil?

Intervalos de clase
Es una forma de agrupar y ordenar los datos o valores observados, cada intervalo está acotado por dos valores extremos (límites).
El número de intervalos de clase se puede calcular de varias formas, una de ellas es la técnica de Norcliffe, la cual consiste en calcular la raíz cuadrada del total de los datos (n); es decir, el número de intervalos está dado por $\sqrt{n}$.

Solución:

El cálculo del número de intervalos para los datos de los pesos de los 20 alumnos se lleva a cabo con la operación:

$\sqrt{20} = 4.472$ Redondeando a 4, por tanto, el número de intervalos es 4.

La respuesta correcta es el inciso A) 4

2.9 ¿Cuál es la amplitud de los intervalos?

A) 7
B) 5
C) 1
D) 2

Amplitud de intervalo

La amplitud del intervalo o ancho de clase es el número de datos que se incluye en cada intervalo. Se calcula como la razón del rango y el número de intervalos:

$$\text{Amplitud de intervalo}=\frac{\text{Rango}}{\text{Número de intervalos}}$$

Solución:

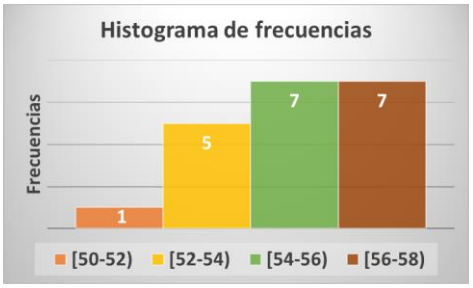
Dado que el rango de los datos es 7 y el número de intervalos es 4, entonces la amplitud del intervalo es:

$$\text{Amplitud de intervalo}=\frac{7}{4}=1.75, \text{se redondea a } 2$$

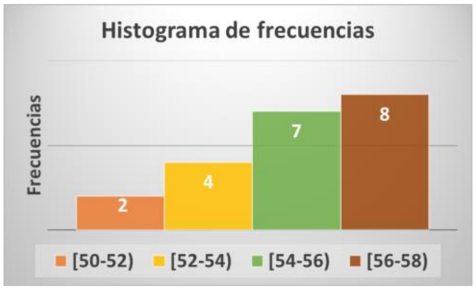
La respuesta correcta es el inciso D) 2

2.10 ¿Cuál es el histograma de frecuencias de los pesos?

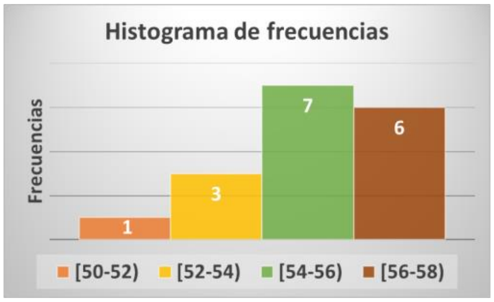
A)



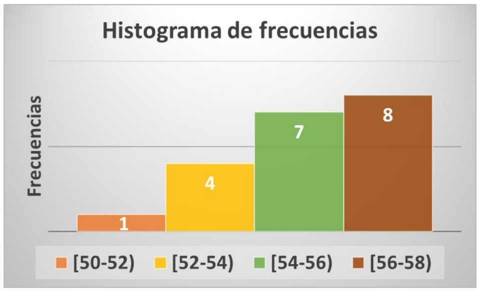
B)



C)



D)



Histograma de frecuencia

Es un diagrama de barras que presenta a escala el número de elementos que comprende cada clase de una distribución de frecuencias. La altura de las barras está determinada por la frecuencia de clase, mientras que los límites horizontales, son los límites exactos de cada clase.

Solución:

Para graficar el histograma es necesario construir la tabla de frecuencias con los intervalos como se muestra en la Tabla 1.6 y de la gráfica de los datos de ésta, se obtiene la Figura 1.4, que es el Histograma de Frecuencias.

Tabla 1.6 Tabla de intervalos

Intervalos de clase	Frecuencia
[50-52)	1
[52-54)	4
[54-56)	7
[56-58)	8

La respuesta correcta es el inciso D)

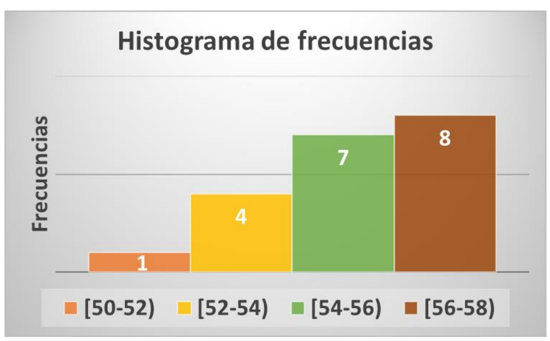


Figura 1.4

Situación 3. Ahorro de material y área máxima

Se tienen 3 varillas de 1.20 metros, 1.80 metros y 60 centímetros de longitud, respectivamente. Necesitan cortarlas en pedazos de igual longitud sin desperdiciar material.

3.1 ¿Cuál debe ser el máximo tamaño en centímetros, de cada pedazo?

A) 60
B) 30
C) 80
D) 15

Números Naturales

Conjunto de números que se denota de la siguiente forma $\mathrm{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ son los números que usualmente se ocupan para contar todo, desde el número de hijos de una familia, la población mundial hasta el número de estrellas o granos de arena. Dentro de este conjunto los siguientes conceptos servirán para responder el primer reactivo.

- *Factorizar un número natural* significa expresarlo como producto de otros números naturales.

- *Un número primo* es un número natural mayor que uno, cuyos únicos factores son 1 y él mismo. Ejemplo de los primeros números primos: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$.

- *Factor común* es un número que es factor de dos o más números.

- *Máximo común divisor* de dos o más números es el máximo de sus factores comunes.

Procedimientos para determinar el *Máximo Común Divisor de dos números.*

- Encontrar la lista de todos los factores de cada número, fijarse en los comunes de ambas listas y elegir el mayor de ellos.

- Encontrar la descomposición en potencias de primos de ambos números y considerar aquellos que son factores de los dos números y al comparar sus exponentes elegir el menor de ellos. El producto de dichos primos elevados a los menores exponentes es el máximo común divisor.

- *Algoritmo de Euclides.* Se divide el número mayor entre el menor. Si el residuo no es cero, se divide el divisor anterior entre el residuo obtenido y se continua de esta manera hasta que el residuo es cero. El último residuo distinto de cero es el máximo común divisor.

Más adelante se comenzará a trabajar con números con signo, así que se definirá al conjunto de números enteros y sus operaciones.

Números enteros

Este conjunto se denota de la siguiente manera $Z=\{\ldots-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$. A continuación se describirán brevemente las operaciones entre números enteros.

Suma

Para sumar dos números enteros con **el mismo signo:**

- *Se suman los valores absolutos de los números, es decir, como si fueran positivos.*
- *Si ambos números son positivos, el resultado es positivo*
- *Si ambos son negativos el resultado es negativo*

Para sumar dos números enteros con **signos contrarios:**

- *Se restan los valores absolutos de los números: el menor del mayor.*
- *El resultado lleva el signo del sumando que tenga el mayor valor absoluto.*

Ejemplos

$(-2)+(-3)=-5$

$(-4)+(+7)=+3$

Producto

- *Multiplicar números con signos iguales da un resultado POSITIVO*
- *Multiplicar números con signos diferentes da un resultado NEGATIVO*

Ejemplos

$(-2)(-3)=+6$

$(-4)(+7)=-28$

Solución:

Para encontrar el tamaño de los pedazos de varilla, lo que se necesita es encontrar el *máximo común divisor* de los tres tamaños de varillas en centímetros.

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$
$$120 = 2^3 \times 3 \times 5 \quad ,$$
$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

El máximo común divisor es el producto de los factores comunes $(2, 3\, y\, 5)$ con exponente menor: $2^2 \times 3 \times 5 = 60$. El tamaño de cada pedazo debe ser 60 centímetros.

La respuesta correcta es A) 60

3.2 Suponga que cada pedazo obtenido al recortar las varillas tiene una longitud de 40 centímetros y con cada uno formarán rectángulos, ver Figura 1.5, ¿qué dimensiones (ancho por largo) deben tener los rectángulos si se busca que su área sea la mayor posible y la figura formada siga siendo un rectángulo? Considera sólo casos de medidas enteras.

Figura 1.5

A) 9×11
B) 10×10
C) 12×8
D) 5×15

Modelo Matemático

Una fórmula como la del perímetro de un rectángulo $(P = 2a + 2b)$ es considerado un modelo matemático, dicha fórmula establece una relación entre dos o más variables. Por ejemplo, para calcular el perímetro de un rectángulo es necesario conocer el valor de su ancho y su largo, de esta forma se puede observar que el valor del perímetro se determina (o depende) de los valores del largo y ancho del rectángulo.

Algunos modelos pueden representarse con fórmulas y también con gráficas, ver Figura 1.6, como el modelo de una recta $y = 3x$.

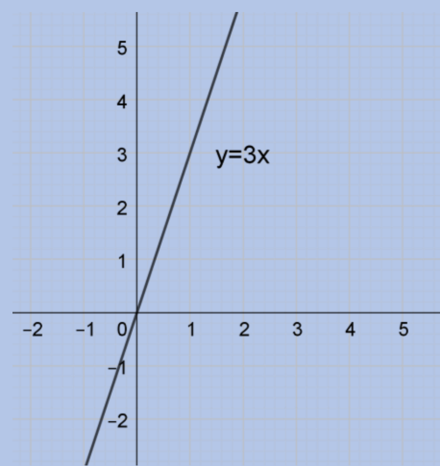


Figura 1.6

En este caso el modelo o fórmula establece una relación entre dos variables: x y y la cual se entiende como y es igual al triple de x. Si la x asume un valor de 2 entones la y toma el valor de 6, es decir el triple de x.

En cursos anteriores se ha trabajado con diferentes fórmulas o modelos matemáticos como las fórmulas del área de figuras geométricas. Más adelante se hablará de la proporcionalidad entre dos variables, la cual puede representarse a través de dos modelos matemáticos que se mencionan frecuentemente en Física.
.

Solución:

En el problema, la información que se da es el tamaño de los pedazos de varilla, 40 centímetros, y como cada pedazo se usará para formar la figura de un rectángulo, entonces se puede ver que esta longitud sería su perímetro. De esta forma el ancho a y el largo b están relacionados por la fórmula $2a + 2b = 40$,es decir, $a + b = 20$, y se busca que el producto $a \cdot b = A_{\max}$ sea máximo.

En este caso podemos mediante una tabla observar la relación entre el ancho y el largo mediante el modelo matemático $a + b = 20$ para obtener la mayor área. Se requiere elegir dos números naturales cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.

Mediante la Tabla 1.7 se puede observar cómo el ancho toma un valor que determina el valor del largo y el producto de estos valores el área del rectángulo.

Tabla 1.7 Valores del largo y ancho

Ancho a en cm.	**Largo b en cm.**	**Área en cm²**
1	19	19
2	18	36
3	17	51
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	11	99
10	10	100
11	9	99
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
19	1	19

Se puede observar que el área máxima se logra cuando las medidas del ancho y el largo son 9 y 11respectivamente, y el área obtenida es de 99centímetros cuadrados.

Es importante notar que hay un área de 100, sin embargo, la figura es un cuadrado pues las medidas de su ancho y largo son iguales.

La respuesta correcta es A) 9×11 (de ancho 9 y 11 de largo)

3.3 Ahora suponga que el tamaño de los pedazos es de 60 centímetros y con ellos se vuelven a formar rectángulos. También se sabe que el ancho a y el largo b están en proporción $1:2$,es decir, el largo es el doble del ancho ¿cuál es el valor de la medida del ancho en centímetros?

A) 12

B) 30

C) 15

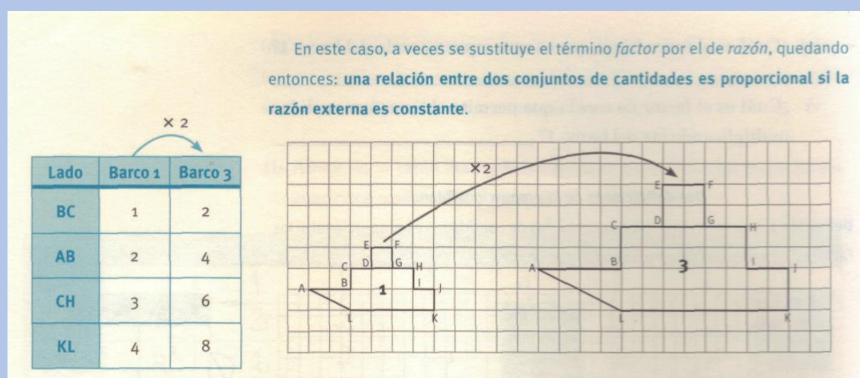
D) 10

Proporcionalidad

- Dos magnitudes a y b son directamente proporcionales si existe un número, siempre el mismo, que multiplicando a a de una de las magnitudes da como resultado la cantidad correspondiente de la otra magnitud b. Este número se llama **factor constante de proporcionalidad.**
-

Ejemplo

Las medidas de los dibujos de dos barcos que se encuentran en la siguiente imagen, ver Figura 1.7, se relacionan en una proporción directa. El factor de proporcionalidad es 2.


En este caso, a veces se sustituye el término *factor* por el de *razón*, quedando entonces: **una relación entre dos conjuntos de cantidades es proporcional si la razón externa es constante.**

Lado	Barco 1	Barco 3
BC	1	2
AB	2	4
CH	3	6
KL	4	8

Figura 1.7 Imagen obtenida del libro "*¿Al doble le toca el doble*?"
de Block, Mendoza y Ramírez

El modelo matemático que describe esta relación es $b = ka$ donde k es el factor constante de proporcionalidad.

- Dos magnitudes a y b son inversamente proporcionales si el producto $a \cdot b$ da siempre el mismo resultado, llamado factor constante de proporcionalidad. El modelo matemático que describe esta relación es $a \cdot b = k$ donde k es la constante de proporcionalidad. El anterior modelo es más frecuente verlo así $b = \frac{k}{a}$

Solución:

La expresión "el largo es el doble del ancho" se puede representar mediante el modelo $b = 2a$ esto implica que el largo y el ancho son directamente proporcionales (y su factor constante de proporcionalidad es 2). Con esto el perímetro del rectángulo sería *seis veces el ancho*. Ver Figura 1.8.

Otro dato que proporciona el problema es la longitud de las varillas, 60 centímetros, el cual corresponde al valor del perímetro del rectángulo, es decir , seis veces el ancho, lo que implica que $a=10$ y el largo sería $b=20$ para que el perímetro $P=2a+2b=2(10)+2(20)=20+40=60$ centímetros, que es la condición que establece el problema.

$$\begin{aligned} P &= 2a+2b \\ &= 2a+2(2a) \\ &= 2a+4a \\ &= 6a \end{aligned}$$

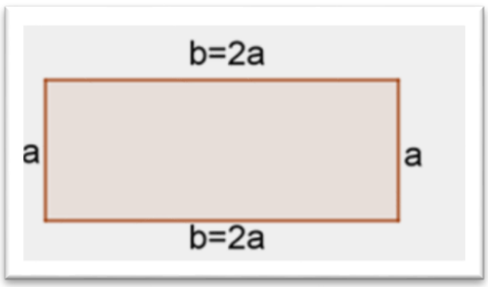


Figura1.8

La respuesta correcta es D) 10

3.4 Se tiene un rectángulo en el que su ancho y largo son directamente proporcionales. Se sabe que su ancho es la tercera parte de su largo ¿cuál es el valor del factor constante de proporcionalidad si éste multiplica el ancho para obtener el largo?

A) 3

B) $\frac{1}{3}$

C) 2

D) $\frac{1}{2}$

Solución:

La expresión “el ancho es la tercera parte de su largo” puede interpretarse como “el largo es tres veces el ancho” y escribirse $b=3a$ siendo a el ancho y b su largo para adaptarse al modelo de proporcionalidad directa, de esta forma el factor de proporcionalidad es tres.

La respuesta correcta es A) 3

Situación 4. Rectángulo modificado

El área A de un rectángulo es igual a $48cm^2$. Si se modifican las dimensiones del rectángulo sin que el área cambie, pero disminuyendo la altura.

4.1. ¿Qué le sucede a la base del rectángulo?

A) Aumenta en la misma proporción que la altura disminuye
B) Se mantiene igual, porque el área no cambia
C) Si la altura disminuye a la mitad, entonces la base disminuye a la mitad.
D) Si la altura disminuye una cantidad definida, entonces la base debe aumentar la misma cantidad para que el área no cambie.

Solución:

La fórmula del área de un rectángulo de base b, altura a y área A es $A = b \cdot a$,pero si el área permanece constante, entonces la base puede expresarse como $b = \frac{A}{a}$ en donde el área representaría el papel de la constante de proporcionalidad.

Nuevamente mediante una tabla de valores (se consideran solo valores enteros) se observa el siguiente comportamiento entre la base y la altura.

Supóngase una altura original de 6 centímetros y por lo tanto una base de 8 centímetros para obtener un área de 48 cm^2.

Tabla 1.8

Altura en cm. ***X***	**Base en cm.** ***y***	**Área en cm^2** ***A***
6	8	48
3	16	48
2	24	48
1	48	48

En la Tabla 1.8 se observa que cuando la altura de 6 disminuye a 3 centímetros (disminuye a la mitad), la base aumenta de 8 a 16 centímetros, esto es aumenta al doble. Si la altura disminuye de 6 a 2 centímetros (disminuye a un tercio de su valor), la base aumenta de 8 al triple, es decir, a 24 centímetros.

La respuesta correcta es A) Aumenta en la misma proporción que la altura disminuye.

4.2 Al modificar la altura del rectángulo sin variar el área, se establece una relación proporcional entre la altura a y la base b ¿de qué tipo?

A) Directa

B) Inversa

C) Lineal

D) Cuadrática

Solución:

Se sabe qué $A = b \cdot a$ y que el valor de A es fijo, por lo tanto el producto $b \cdot a$ da siempre el mismo resultado esto es, la relación es inversamente proporcional.

La respuesta correcta es B) Inversa.

4.3 De los siguientes modelos matemáticos ¿cuál se ajusta al fenómeno descrito en la situación del Rectángulo modificado?

A) $A = 48a$

B) $a = 48b$

C) $a = \frac{48}{A}$

D) $b = \frac{48}{a}$

Solución:

El modelo que se busca es la fórmula del área $A = b \cdot a$ y como el área tiene un valor fijo de $48cm^2$ la expresión quedaría así $48 = b \cdot a$, la cual también puede expresarse de la siguiente forma $b = \frac{48}{a}$.

La respuesta correcta es el inciso D) $b = \frac{48}{a}$

4.4 Si existe una relación de proporcionalidad ¿cuál es el valor del factor constante de proporcionalidad?

A) 48

B) 30

C) 24

D) 96

Solución:

La definición de proporcionalidad inversa dice que dos variables son inversamente proporcionales si su producto siempre es el mismo y a este resultado se le conoce como factor constante de proporcionalidad. En este caso el producto de la altura por la base siempre es igual a $48 cm^2$, por lo que éste es el factor.

La respuesta correcta es A) 48

Situación 5. Herencia maldita

Laura recibió de su madre fallecida una herencia. Su mamá era una matemática obsesiva y decidió que Laura debía descifrar el siguiente acertijo para poder recibir la parte del dinero que le correspondía: *Tu hermano Gabriel recibirá la tercera parte de la herencia, tu hermana Lucero las dos quintas partes, he dejado con tu padre* 75000 *pesos que te serán entregados al descifrar el acertijo y que representan la mitad de tu herencia ¿qué fracción de la herencia destiné para ti?*

5.1 ¿Cuál es la fracción de la herencia que la mamá de Laura destino para ella?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{15}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{4}{15}$

Números Racionales

El conjunto de los racionales se define y denota de la siguiente forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / \ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Lo anterior se puede leer como el conjunto de números de la forma $\frac{p}{q}$ tales que p, q pertenecen al conjunto de los enteros y q es distinto de cero. Es común llamarlos números fraccionarios. Al número p se le llama numerador y a q denominador.

Conceptos básicos

Equivalencia

Dos fracciones son equivalentes, es decir representan el mismo número, si una se obtiene de la otra al multiplicar el numerador y denominador por el mismo número entero distinto de cero.

Ejemplo

$\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son equivalentes, porque $\frac{2}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2}$

Suma

Podemos sumar directamente fracciones equivalentes con el mismo denominador.

Ejemplo

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{5 \times 3} + \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{3}{15} + \frac{5}{15} = \frac{8}{15}$$

Es importante notar que el denominador de la fracción equivalente representa al **mínimo común múltiplo** de los denominadores originales.

Los múltiplos de cinco son: $5, 10, 15, 20, 25, \ldots, 30 \ldots, 45, \ldots$
Los múltiplos de tres son: $3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots, 30, \ldots, 45 \ldots$

El menor de los múltiplos comunes es 15

Producto

Se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador. Ejemplo

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1\times1}{5\times3}=\frac{1}{15}$$

Para dividir dos números racionales, al primero lo multiplicamos por el recíproco del segundo.

Ejemplo

$$\frac{3}{5}\div\frac{4}{7}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{21}{20}$$

También se usa la regla de extremos y medios.

Ejemplo

$$\frac{3}{5}\div\frac{4}{7}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}=\frac{3(7)}{5(4)}=\frac{21}{20}$$

En esta regla se multiplican los extremos que son el tres y el siete, colocando el resultado en el numerador y el producto de los medios que son el cinco y el cuatro como denominador.

Solución:

Si sumamos las fracciones de la herencia recibida por Gabriel y Lucero nos daría:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{1\times5}{3\times5}+\frac{2\times3}{5\times3}$$
$$=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$$

Esto significa que Laura recibe $\frac{4}{15}$ pues la herencia completa sería $\frac{15}{15}$

La respuesta correcta es el inciso D) $\frac{4}{15}$

5.2 ¿Cuánto dinero recibirá Laura, en caso de que logre descifrar el acertijo?

A) $150\,000$

B) $140\,000$

C) $25\,000$

D) $50\,000$

Solución:

Como su papá tiene $75\,000$, que corresponde a la mitad de la herencia de Laura, ella recibirá $150\,000$.

La respuesta correcta es el inciso A) $150\,000$

5.3 ¿El dinero que recibe Gabriel es mayor que lo que recibe Lucero?

A) No

B) Sí

C) No es posible saberlo

D) Son iguales

Solución:

No, Gabriel recibe $\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$ y Lucero $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$

La respuesta correcta es A) No

5.4 ¿Cuál es el valor de toda la herencia?

A) $150\,000$

B) $562\,500$

C) $600\,000$

D) $550\,500$

Solución:

Se sabe que Gabriel recibirá $\frac{1}{3}$ de la herencia, Lucero $\frac{2}{5}$ partes de la misma, así que se puede sumar estas dos fracciones convirtiéndolas a fracciones equivalentes.

$\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$ y $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$ entonces si se suma la parte de Gabriel con la de Lucero $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$ esta fracción implica que la herencia total correspondería a $\frac{15}{15}$ y los $\frac{4}{15}$ que faltan es la parte de Laura, significa que los $\frac{2}{15}$ son equivalentes a los 75000 que guardaba el papá de Laura y la mitad de los 75000 equivaldrían a $\frac{1}{15}$

Si $\frac{1}{15}$ son $\frac{75000}{2}=37500$ entonces $\frac{15}{15}$ serían $37500\times 15=562500$.

La respuesta correcta es A) 562500

Situación 6. ¿Copio o me quedo con lo mío?

En el anterior examen extraordinario de Matemáticas IV, Miguel realizó las operaciones señaladas en el siguiente ejercicio $48\div(-6)(2)+(-2)^3-(-1)^{12}=$ obteniendo el resultado de -25. Su mejor amigo, sentado junto a él, resolvió el mismo ejercicio y obtuvo el resultado de -13.

6.1 ¿Alguno de estos resultados es correcto?

A) La respuesta de Miguel es la correcta.

B) Ninguno, el resultado correcto es -36

C) La respuesta del amigo está bien.

D) El resultado correcto es -16

La **Jerarquía de operaciones** señala el siguiente orden de prioridad de mayor a menor:

- Potencias, raíces y las operaciones señaladas entre paréntesis.
- Multiplicaciones y divisiones.
- Sumas y restas.

Como las multiplicaciones y divisiones tienen la misma prioridad, en caso de presentarse una después de la otra, se realizaría primero la operación de la izquierda y luego la de la derecha, ejemplo.

$16 \div 8(3) = (2)(3) = 6$

Similarmente en el caso de sumas y restas.

Para el caso de las potencias con números negativos se tiene el siguiente resultado:

$$(a)^n = \begin{cases} \text{resultado positivo si } n \text{ } es \, número \; par \\ \text{resultado negativo si } n \text{ } es \, número \, impar \end{cases}$$

Solución:

En el ejercicio $48 \div (-6)(2) + (-2)^3 - (-1)^{12} =$ es necesario resolver primero las potencias, recordando que

$$(-1)^n = \begin{cases} +1 \text{ si } n \text{ } es \, número \; par \\ -1 \text{ si } n \text{ } es \, número \, impar \end{cases}$$

Lo anterior lo podemos usar para ver qué, $(-2)^3 = -8$ y que $(-1)^{12} = +1$. Y como al principio del ejercicio se tiene una división y multiplicación, se procederá de izquierda a derecha, esto es:

$$\begin{aligned} 48 \div (-6)(2) + (-2)^3 - (-1)^{12} &= 48 \div (-6)(2) + (-8) - (+1) \\ &= (-8)(2) - 8 - 1 \\ &= -16 - 8 - 1 \\ &= -25 \end{aligned}$$

La respuesta correcta es el inciso A) La respuesta de Miguel es la correcta.

6.2 En el ejercicio del examen: $48 \div (-6)(2) + (-2)^3 - (-1)^{12}$, el amigo de Miguel escribió lo siguiente $48 \div (-6)(2) + (-2)^3 - (-1)^{12} = 48 \div (-12) + (-8) - (+1)$. Este proceso presenta un error, identifícalo.

A) La potencia $(-1)^{12} = -12$

B) Multiplica antes de dividir

C) No cometió ningún error

D) Multiplica y realiza las potencias al mismo tiempo

Solución:

El error que comete el amigo es realizar primero la multiplicación antes que la división. Se sabe que ambas tienen la misma jerarquía, sin embargo, cuando aparecen una después de la otra, se deben realizar de izquierda a derecha. El amigo debió dividir 48 entre -6 antes de multiplicar $(-6)(2)$

La respuesta correcta es B) Multiplica antes de dividir.

6.3 Otro de los ejercicios planteados en el examen de Miguel contenía operaciones con exponentes fraccionarios: $(-8)^{\frac{1}{3}} \div (-1)^0 + (4)^{-\frac{1}{2}} - (27)^{\frac{1}{3}}$ Miguel sabe que los exponentes fraccionarios representan raíces cúbicas o cuadradas, y alcanza a observar que su amigo César, que está sentado enfrente, escribió: $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2,$ pero Miguel sabe que las raíces de números negativos no existen, entonces ¿quién tiene la razón?

A) César está en lo correcto.

B) Miguel tiene razón.

C) Ambos están equivocados ya que $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = +2$

D) Ambos tienen razón.

Leyes de los exponentes

Dentro de las leyes de los exponentes dos de ellas afirman que:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo

$$\sqrt[3]{3^{12}} = 3^{\frac{12}{3}} = 3^4 = 81$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Se define la raíz cuadrada de un número a como el número b tal que $b^2 = a$.

Ejemplo

$\sqrt{9} = +3 \; o \; -3$ ya que $(+3)^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$

De la misma forma $\sqrt[3]{-8} = -2$ ya que $(-2)^3 = -8$

Lo anterior ayuda a concluir que existen raíces cúbicas de números negativos, pero no es posible para el caso de raíces cuadradas, pues cualquier número elevado al cuadrado tiene como resultado un número positivo.

El resto de las leyes más utilizadas son:

$(a^m)(a^n) = a^{m+n}$ $\qquad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(a)^0 = 1 \; si \; a \neq 0$ $\qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\qquad \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Solución:

De acuerdo con la ley de exponentes fraccionario $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^1}$, es decir, $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$ ya que $(-2)^3 = -8$.

La respuesta correcta es A) César está en lo correcto

6.4 ¿Cuál es el resultado del ejercicio $(-8)^{\frac{1}{3}} \div (-1)^0 + (4)^{-\frac{1}{2}} - (27)^{\frac{1}{3}}$?

No entiendo (4) elevado a 1/2

A) $-\dfrac{9}{2}$

B) $-\dfrac{1}{2}$

C) -7

D) -3

Solución:

Considerando que todo número (distinto de cero) elevado al exponente cero es igual a uno; las leyes de exponentes fraccionarios y negativos, el procedimiento para resolver sería:

$$\left(-8\right)^{\frac{1}{3}} \div \left(-1\right)^{0} + \left(4\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(27\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} \div 1 + \frac{1}{\left(4\right)^{\frac{1}{2}}} - \sqrt[3]{27}$$

$$= -2 \div 1 + \frac{1}{\sqrt{4}} - 3$$

$$= -2 \div 1 + \frac{1}{2} - 3$$

$$= -2 + \frac{1}{2} - 3$$

$$= -5 + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{10}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{9}{2}$$

La respuesta correcta es A) $-\frac{9}{2}$

Situación 7. Gustos musicales

Los datos de una encuesta arrojan los resultados mostrados en la Tabla 1.9, sobre gustos musicales.

Tabla 1.9 Gustos musicales

	Estudiantes	**Profesionistas**	**Obreros**	Totales
Tropical	2	4	26	
Clásica	3	18	1	
Rock	20	6	5	
Total				

7.1 Completa la Tabla 1.9 y contesta la siguiente pregunta ¿qué porcentaje de los profesionistas no prefiere la música tropical.

A) 85.71

B) 14.28

C) 32.94

D) 28.23

Porcentajes

Se puede considerar como una representación de una fracción en la que el **todo** se divide **cien partes.**

Ejemplo

50% se puede interpretar 50 partes de 100

Otra forma de entender un porcentaje es como una razón entre dos cantidades

Ejemplo

En un grupo de 40 alumnos 10 de ellos son mujeres, esto es, la cuarta parte del grupo son mujeres y por lo tanto, el 25% son alumnas.

$$\frac{10}{40}=\frac{1}{4}=0.25=\frac{25}{100}=25\%$$

Solución:

Al completar la tabla los totales son los siguientes:

	Estudiantes	**Profesionistas**	**Obreros**	Totales
Tropical	2	4	26	32
Clásica	3	18	1	22
Rock	20	6	5	31
Total	25	28	32	85

De 28 profesionistas 4 prefieren la música tropical, por lo que 24 prefieren otro tipo de música, por lo tanto:

$$\frac{28}{100}=\frac{24}{x} \text{ entonces } x=\frac{(24)(100)}{28}=85.71\%$$

La solución correcta es el **inciso A)** 85.71

7.2 ¿Qué porcentaje de los encuestados prefiere la música tropical?

A) 37.64

B) 12.50

C) 32.94

D) 32.00

Solución:

Existen 85 encuestados y 32 prefieren la música tropical, de esta forma se tiene el siguiente planteamiento:

$$\frac{85}{100}=\frac{32}{x}\,entonces\;\; x=\frac{(100)(32)}{85}=37.64\%$$

La respuesta correcta es A) 37.64

7.3 ¿Qué porcentajes de los encuestados son profesionistas?

A) 32.94

B) 27.64

C) 47.65

D) 30.65

Solución:

Son 28 profesionistas de 85 encuestados, así que

$$\frac{85}{100}=\frac{28}{x}\,entonces\;\; x=\frac{(100)(28)}{85}=32.94\%$$

La respuesta correcta es A) 32.94

Situación 8. Becas

En la Ciudad de México la beca de Educación Media Superior es de $800.00 mensuales y la beca de Educación Superior es de $2 400.00 mensuales. Cada beca se entrega por bimestre vencido, durante los diez meses de cada ciclo escolar (de septiembre a junio).

8.1 La cantidad total de dinero que recibe cada alumno de Educación Media Superior durante todo el ciclo escolar, expresada en notación científica es:

A) 8×10^{-3}

B) 8×10^{3}

C) 1.6×10^{3}

D) 1.6×10^{-3}

Notación Científica

Un número está escrito en notación científica si se expresa de la forma

$$m \times 10^{c}$$

donde c es cualquier entero y m es mayor que o igual a 1 y menor que 10. Esto es,

$$1 \le m < 10$$

Para indicar una cantidad en notación científica, escriba la cifra como el producto de un número 1 y 10 mediante potencias de 10. Por ejemplo,

$$4765 = 4.765 \times 1000 = 4.765 \times 10^{3}$$

$$0.00123 = 1.23 \times \frac{1}{1000} = 1.23 \times 10^{-3}$$

Solución:

Dado que la beca es de \$800.00 mensual, esto quiere decir que cada alumno recibe \$1 600.00 por bimestre, así al cabo del ciclo escolar que equivalen a 5 bimestres, el alumno recibe $1600 \times 5 = 8000$ pesos. También se puede calcular como el producto de la cantidad mensual por todos los meses que tiene el ciclo escolar, es decir $800 \times 10 = 8000$.

Ahora para expresar la cantidad de 8000.00 en notación científica se realiza de la siguiente forma

$$8000.00 = 8.000 \times 1000 = 8 \times 10^{3}$$

Por tanto, la respuesta correcta es el inciso B) 8×10^{3}

8.2 Si un estudiante de Educación Superior gastó en un bimestre: $1 026.00 en pasajes $2 476.00 en alimentos, $1 250.00 en la compra de 3 libros, y el resto lo gasto en un café. El porcentaje de su beca que gasto en café, escrito en notación científica es:

A) 1×10^{-3}

B) 1×10^{3}

C) 1×10^{-2}

D) 1×10^{2}

Solución:

Para saber cuánto gasto en el café, se suman los gastos del libro, comida y pasajes, para restar este resultado del total de la beca:

$$1026+2476+1250=4752$$
$$4800-4752=48$$

esto significa que gasto $\$4\ 752.00$ en libros, comida y pasajes, por tanto, para el café gastó $\$48.00$.
Para saber el porcentaje que representa $\$48.00$ de $4\ 800$, se realiza el cociente:

$$\frac{48}{4800}=\frac{1}{100}=0.01=1\%$$

lo que indica que $\$48.00.$ representa el 1% de $\$4\ 800.00$.
Entonces, 1% escrito en notación científica es:

$$0.01=1\times10^{-2}$$ No se explican las potencias negativas

La respuesta correcta es el inciso C) 1×10^{-2}

8.3 La cantidad total que recibe un estudiante de Educación Superior en 4 bimestres expresada en notación científica es 1.92×10^{4} ¿Cuál es su expresión en pesos?

A) $\$1920$

B) $\$19.20$

C) $\$19020$

D) $\$19\,200$

Para escribir un número en notación científica en forma común, se invierte el proceso multiplicativo por la potencia de 10. Por ejemplo,

$$4.207\times10^{5}=4.207\times100\,000=420\,700$$

$$9.001\times10^{-4}=9.001\times\frac{1}{10\,000}=0.0009001$$

Solución:

Para saber qué cantidad en pesos representa la expresión 1.92×10^{4}**,** se realiza la operación:

$$1.92\times10^{4}=1.92\times10\,000=19\,200$$

Este resultado indica que la cantidad de dinero que el estudiante recibió en 4 bimestres es de $\$19\ 200.00$

La respuesta correcta el inciso D) $\$19\ 200.00$

8.4 Un estudiante de Educación Media Superior decide dar una cantidad de dinero a un niño indigente que se encontró en la calle, la cantidad es el 2.5×10^{-3} en porcentaje de su beca de dos bimestres. ¿Cuánto dinero le dio al niño de la calle?

- **A)** $\$80.00$
- **B)** $\$40.00$
- **C)** $\$4.00$
- **D)** $\$8.00$

Solución:

Primero se expresa 2.5×10^{-3} en forma común:

$$2.5\times10^{-3}=2.5\times\frac{1}{1000}=0.0025$$

$$0.0025=0.25\%$$

NO entendí…

¿Y para qué sirve esta notación?

Lo que significa que 2.5×10^{-3} equivale a 0.25%, entonces el 0.25% de $\$3200.00$ que es el total de dos becas, es $0.0025\times3200=8.00$.

De esta forma se da cuenta que el alumno dio $\$8.00$ al niño de la calle.

La respuesta correcta es el inciso D) $\$8.00$

ACTIVIDADES DE REFORZAMIENTO

Situación 9. Calificaciones

La Figura 1.9 a muestra la gráfica de barras de alumnos por grupo y la Figura 1.9 b representan el promedio de calificaciones por grupo; de seis grupos de cuarto grado de la ENP Núm.8

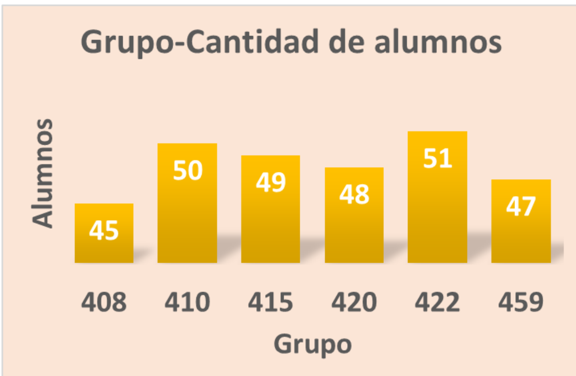


Figura 1.9 a

Figura 1.9 b

9.1 ¿Cuál es el promedio de alumnos por grupo?
- **A)** 48
- **B)** 51
- **C)** 50
- **D)** 49

9.2 ¿Cuál es la media aritmética de las calificaciones que se muestran?
- **A)** 7.4
- **B)** 7.9
- **C)** 7.5
- **D)** 7.6

9.3 ¿Cuál es el valor de la moda en las calificaciones que se muestran?
- **A)** 7.5
- **B)** 7.9
- **C)** 7.7
- **D)** 7.6

9.4 ¿Qué información aporta la media aritmética de las calificaciones?

- **A)** Es la calificación más alta para todos los grupos.
- **B)** Es la calificación más baja de todos los grupos.
- **C)** Es la calificación promedio para todos los grupos.
- **D)** Es la calificación que no aporta ninguna información.

Situación 10. Sobrepeso y Obesidad

En una encuesta realizada a 1500 hogares (400 en la ciudad de México y 1100 en el resto del país) por Investigación Social Estratégica (DINAMIA): Encuesta Nacional sobre Obesidad, agosto 2018. (ver Figura 10.1), se muestra la gráfica circular con el porcentaje de respuestas a la pregunta: ¿cuál cree usted que es la causa principal del sobrepeso y la obesidad?

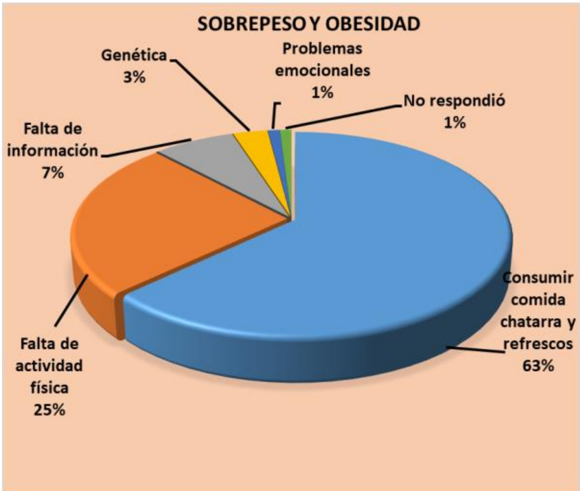


Figura 1.10

Dada la presente información responde lo siguiente

10.1 ¿Cuál es la cantidad de hogares que respondieron que “la causa principal del sobrepeso y la obesidad se debe a la falta de actividad física”?

- **A)** 945
- **B)** 105
- **C)** 375
- **D)** 100

10.2 ¿Cuál es la tabla que representa la frecuencia absoluta de la información?

A)

Causa principal del sobrepeso y obesidad	Frecuencia absoluta
Comida chatarra y refrescos	105
Falta de actividad física	375
Falta de información	945
Genética	45
Problemas emocionales	15
No respondieron	15

B)

Causa principal del sobrepeso y obesidad	Frecuencia absoluta
Comida chatarra y refrescos	15
Falta de actividad física	45
Falta de información	105
Genética	375
Problemas emocionales	15
No respondieron	945

C)

Causa principal del sobrepeso y obesidad	Frecuencia absoluta
Comida chatarra y refrescos	15
Falta de actividad física	15
Falta de información	45
Genética	105
Problemas emocionales	375
No respondieron	945

D)

Causa principal del sobrepeso y obesidad	Frecuencia absoluta
Comida chatarra y refrescos	945
Falta de actividad física	375
Falta de información	105
Genética	45
Problemas emocionales	15
No respondieron	15

10.3 ¿Qué porcentaje de hogares identifica al menos una causa principal del sobrepeso y la obesidad?

A) 90%
B) 10%
C) 99%
D) 91%

10.4 ¿Cuánto mide el ángulo del sector de hogares que cree que "la causa principal del sobre peso y la obesidad es por consumir comida chatarra y refrescos"?

A) 220.6°
B) 220.8°
C) 226.8°
D) 226.6°

10.5 ¿Qué cantidad de hogares respondió que “la causa principal del sobrepeso y la obesidad son los problemas emocionales”?

A) 45
B) 10
C) 20
D) 15

Situación 11. Opciones técnicas

En los grupos de tercer grado de una Secundaria Técnica, las $\frac{2}{7}$ de los estudiantes decidieron llevar la Opción Técnica de Contabilidad y $\frac{3}{8}$ la de Computación. El resto de los alumnos rehusaron tomar alguna Opción Técnica.

11.1 ¿Qué fracción del grupo decidió no tomar ninguna Opción Técnica?

A) $\frac{37}{56}$
B) $\frac{19}{56}$
C) $\frac{5}{15}$
D) $\frac{10}{15}$

11.2 ¿El número de alumnos que toma Contabilidad es mayor, menor o igual que los que toman Computación?

A) Es mayor
B) Es menor
C) Son iguales
D) No se puede saber, faltan datos

11.3 Si 19 alumnos son la mitad de los que rehusaron tomar Opción Técnica ¿cuántos estudiantes tiene el tercer grado de esa secundaria?

A) 190
B) 112
C) 200
D) 156

11.4 ¿Qué porcentaje de alumnos no lleva Opción Técnica?

A) 33.92
B) 43.90
C) 38.20
D) 19.45

Situación 12. Jerarquía de operaciones

En el desarrollo del ejercicio mostrado a continuación, se cometió un error.

$$\begin{aligned}\sqrt{25-16}+(-1)^{12}-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{2} &= \sqrt{9}+1-\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\\ &= 3+1-\frac{1}{36}\\ &= 4-\frac{1}{36}\\ &= \frac{143}{36}\end{aligned}$$

12.1 Elige la opción que señala el error.

A) En la raíz se restó el 16 del 25 y posteriormente se obtuvo la raíz
B) $(-1)^{12}\ no\, es\, 1$
C) En las fracciones, primero multiplica y luego eleva al cuadrado
D) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\ no\, es\ \frac{1}{36}$

12.2 ¿Cuál es el resultado correcto?

A) $\frac{71}{18}$
B) $\frac{111}{36}$
C) $\frac{539}{36}$
D) $\frac{37}{18}$

12.3 ¿Cuál es el resultado de la primera parte del ejercicio: $\sqrt{25-16}+(-1)^{12}$?

A) 4
B) 2
C) 15
D) 0

12.4 En la jerarquía de operaciones, la última operación que debe realizarse corresponde a:

- **A)** Sumas
- **B)** Potencias
- **C)** Raíces
- **D)** Multiplicaciones

RESPUESTAS A LAS ACTIVIDADES DE REFORZAMIENTO

9.1 A)	**9.2 B)**	**9.3 D)**	**9.4 C)**	
10.1 C)	**10.2 D)**	**10.3 C)**	**10.4 C)**	**10.5 D)**
11.1 B)	**11.2 B)**	**11.3 B)**	**11.4 A)**	
12.1 C)	**12.2 A)**	**12.3 A)**	**12.4 A)**	

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Chao, L. (1999). Introducción a la Estadística. México: Continental, S.A. de C.V.

Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica.* México, México: Somos maestras.

Phillips, E., Butts, T., Shaughnessy, M. (1988). *Álgebra con Aplicaciones*. México: Oxford.

Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, A. (2007). *Álgebra.* México: Pearson educación.

Quevedo, F. (2011). Medidas de tendencia central y dispersión. *Medwave*, *11*(03).

Sánchez, O. (1998). *Probabilidad Y Estadística*. México: Mc Graw Hill.

DINAMIA (Investigación Social Estratégica). (2018). *Encuesta nacional de obesidad*. Ciudad de México. Recuperado de http://dinamia.com.mx/wp-content/uploads/2018/09/Encuesta-Nacional-Obesidad-2018-Etiquetado.pdf. Consultado el: 9/11/2019.

UNIDAD 2. EXPRESIONES ALGEBRAICAS PARA DESCRIBIR Y GENERALIZAR

Objetivo

El alumno:

Desarrollará habilidades de razonamiento lógico, abstracción, generalización y comunicación matemática al: representar fenómenos o eventos a través de modelos algebraicos que involucren operaciones con expresiones algebraicas; analizar representaciones y resolver las operaciones algebraicas involucradas mediante procedimientos diversos aplicando las propiedades pertinentes; fundamentar el procedimiento algebraico seleccionado; validar sus resultados en el contexto de la situación o fenómeno analizado.

Situación 1. El huerto

En el 2011 San Luis Potosí ocupaba el tercer lugar de producción de naranja y mandarina . El abuelito de Luisa , Don Alberto, vive ahí. Tiene un total de 112 árboles de naranjos y mandarinos. El número de árboles por hilera es igual al triple del total de hileras disminuido en 10

1.1 La expresión que representa el número de árboles por hilera, si h representa el número de hileras, en el huerto es:

A) $3h-10$
B) $3h^2-10h$
C) $10-3h$
D) $10h^2-3h$

Lenguaje algebraico: lenguaje que se utiliza en (álgebra) matemáticas para representar cantidades, operaciones o relaciones entre cantidades, por medio de la combinación de letras (literales) y números.

Término algebraico: es la combinación de letras y números reales utilizados para representar cantidades. Cada término algebraico está formado por un coeficiente numérico, una o más literales y por el exponente correspondiente a cada literal.

Expresión algebraica: es una expresión formada por un término o la suma de términos algebraicos.

Solución:

El número de árboles sembrados por hilera es el triple del total de hileras y como h representa el número de hileras, entonces se representa el triple por $3h$, pero se dice que es menor en 10, así que $3h - 10$ es la expresión algebraica que representa el número de árboles por hilera.

Respuesta correcta: A) $3h - 10$

1.2 ¿Cuál es la expresión algebraica con la que se representa el número total de árboles del huerto de Don Alberto si h representa las hileras?

- **A)** $3h - 10$
- **B)** $10 - 3h$
- **C)** $3h^2 - 10h$
- **D)** $10h^2 - 3h$

Solución:

Si hay h hileras y por cada una se tienen $3h - 10$ mandarinos y naranjos, entonces se tienen $h(3h - 10)$ árboles que es lo mismo que $3h^2 - 10h$ (si realizamos la multiplicación, $h(3h - 10) = h(3h) + h(-10)$ árboles). Por lo que la expresión algebraica que representa el total de árboles es $3h^2 - 10h$

Respuesta correcta: C) $3h^2 - 10h$

1.3 El número total de hileras en el huerto del abuelito de Luisa es

- **A)** 14
- **B)** 3
- **C)** 10
- **D)** 8

Valor de una expresión algebraica

Al sustituir el valor real que se asigna a la literal o literales que aparecen en la expresión algebraica y realizar las operaciones indicadas en ella, se obtiene el valor de la expresión.

Solución:

En la Tabla 2.1 se muestran los valores que obtenemos de $3h^2 - 10h$ cuando h toma diferentes valores.

El total de hileras h debe ser un número natural puesto que no se cuentan árboles incompletos, es decir, no hay terceras partes o mitades de árboles ni decimos hay menos tres árboles. Como hay en total 112 árboles, si sustituimos h por algún número natural $3h^2$ debe ser mayor a $-10h$ para que su diferencia siga siendo un número natural, y además igual a 112 dado que $3h^2 - 10h = 112$.

h	$3h^2 - 10h$
1	-7
2	-8
5	25
6	48
7	77
8	112

Tabla 2.1

Si h toma el valor de 6, $3h^2 - 10h = 3(6)^2 - 10(6) = 3(36) - 60 = 108 - 60 = 48$.

Si $h = 7$, $3h^2 - 10h = 3(7)^2 - 10(7) = 3(49) - 70 = 147 - 70 = 77$.

Si $h = 8$, $3h^2 - 10h = 3(8)^2 - 10(8) = 3(64) - 80 = 192 - 80 = 112$

Respuesta correcta: D) 8

1.4 En cada hilera del huerto de Don Alberto, la cantidad de mandarinos (m) es igual a la tercera parte de la cantidad de naranjos aumentados en 2 (o más de dos). ¿Cuál es la expresión algebraica que indica la cantidad de naranjos por hilera (en términos de m)?

A) $3m-2$

B) $\frac{1}{3}(m+2)$

C) $\frac{1}{3}m+2$

D) $3(m-2)$

Solución:

Si en cada hilera el número de mandarinos es igual a la tercera parte de la suma de los naranjos y dos, primero se tienen $n+2$ y se toma la tercera parte, así $m=\frac{1}{3}(n+2)$. Por lo que el triple de mandarinos es el total de naranjos en la hilera aumentados en dos $3m=n+2$. De donde el número de naranjos por hilera será el triple de mandarinos menos dos $n=3m-2$

Respuesta correcta: A) $3m-2$

Situación 2. Ana y su jardín

En el jardín de Ana se encuentran cuatro maceteros rectangulares, los tres primeros maceteros A, B y C tienen el mismo ancho, y el ancho del macetero D cuyos lados miden lo mismo , es el triple del ancho de A. Observa la figura siguiente y supón que el que ancho se llama x. Figura 2.2

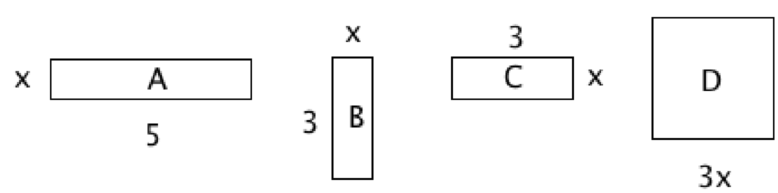


Figura 2.2

2.1 El polinomio que representa la suma de cada una de las áreas de los maceteros es:

A) $(2x+10)+(2x+6)+(2x+6)+(12x)$

B) $(2x+10)+(2x+6)+(2x+6)+(12)$

C) $(5x)+(3x)+(3x)+(9x^2)$

D) $(5x)+(3x)+(3x)+(3x^2)$

> **Monomio** es una expresión formada por un solo término, en el cual los exponentes de las literales son números naturales.
> **Polinomio** es una expresión algebraica, la cual está constituida por uno, dos o más monomios.

Solución:

Para obtener el polinomio que representa la suma de cada una de las áreas de los maceteros se procede de la siguiente manera: se obtienen las áreas de cada macetero y luego se expresa la suma de dichas áreas. Los maceteros A, B y C representan rectángulos, por lo que se empleará la fórmula del área de un rectángulo $A=(l\mathrm{argo})(ancho)$. El macetero D reseprenta un cuadrado por lo que su área sera $A=(lado)(lado)$.

Área del macetero A; $A_A=(5)(x)=5x$

Área del macetero B: $A_B=(3)(x)=3x$

Área del macetero C: $A_C=(3)(x)=3x$

Área del macetero D: $A_D=(3x)(3x)=9x^2$

Expresión que representa la suma de las áreas de los maceteros:

$A_{total}=A_A+A_B+A_C+A_D$

$A_{total}=5x+3x+3x+9x^2$

Respuesta correcta: C) $(5x)+(3x)+(3x)+(9x^2)$

2.2 El polinomio que representa el área total que ocupan los maceteros es:

A) $11x+9x^2$

B) $-11x+9x^2$

C) $-11x-9x^2$

D) $20x$

Términos Semejantes:

Son aquellos términos que tienen las mismas literales elevadas a los mismos exponentes, por lo tanto se pueden reducir o simplificar.

Solución:
Para obetener el área total que ocupan los maceteros, se suman los términos semejantes, siendo $5x$, $3x$ y $3x$ términos semejantes (tienen la misma literal x con igual exponente "1"), por lo que se pueden reducir $5x+3x+3x=(5+3+3)x=11x$ el término $9x^2$ no es semejante porque su exponente (2) difirere con el de los otros términos.

Respuesta correcta: A) $11x+9x^2$

2.3. El grado del polinomio que representa la suma total del área de los maceteros es:

- **A)** Uno
- **B)** Dos
- **C)** Tres
- **D)** Cero

Grado de un polinomio

Polinomio formado en una sola literal: Es el exponente de mayor orden de la literal que forman los monomios de un polinomio.
Polinomio formado por varias literales: Se toma el mayor grado de los monomios. El grado de un monomio se obtiene sumando los exponentes de las literales que lo componen.

Solución:

Para determinar el grado del polinomio, basta examinar cada término y hallar el exponente del mayor orden de la literal, el exponente de $11x$ es uno y el exponente de $9x^2$ es dos, por lo tanto el mayor grado del polinomio es dos.

Respuesta correcta: B) Dos

2.4 Si el ancho del macetero A es de 2 m, entonces el área del macetero D es:

A) $12\ m^2$
B) $24\ m^2$
C) $26\ m^2$
D) $36\ m^2$

Solución:

Recuerda que si el ancho (lado común) del macetero A es x, y el ancho del macetero D es el triple del ancho de A, entonces su ancho será $3x$, pero como $x=2$ y al tener sus lados iguales, entonces su área será:

$$A=(3x)^2=[3(2)]^2=(6)^2=36u^2$$

Respuesta correcta: D) $36\ m^2$

Situación 3. Demanda de un producto

Cuando los consumidores demandan x unidades de cierto producto, la expresión algebraica demanda D da el precio en pesos por unidad. Sea $D=x^2-14x+49$ donde
$ 49.00 es el costo fijo por producción.

3.1 La expresión que representa la demanda es un

A) Monomio
B) Binomio
C) Trinomio
D) Cuatrinomio

Polinomio: es una expresión algebraica formada por la suma de monomios, es decir, por expresiones de un sólo término en los cuales los exponentes de las literales son números enteros positivos (naturales). De acuerdo con el número de monomios que lo forman recibe su nombre: binomio (dos monomios), trinomio (tres monomios), cuatrinomio (cuatro monomios), y en general polinomio.

Solución:
Trinomio: la expresión algebraica está formada por tres monomios.
Respuesta correcta: C) Trinomio.

3.2 El método adecuado para factorizar el trinomio $D = x^2 - 14x + 49$ es:

- **A)** Factorización de un trinomio cuadrado perfecto
- **B)** Factorización de completando cuadrados
- **C)** Factorización de una diferencia de cuadrados
- **D)** Factorización por término común

Factorizar: es expresar un número como un producto.

Trinomio cuadrado perfecto es un trinomio que está formado por dos monomios, de igual signo, que tienen raíz cuadrada y un término que representa el doble producto de esas raíces.

Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP): consite en extraer la raíz cuadrada de los términos cuadráticos, relacionar las raíces con el signo del otro término y elevar al cuadrado esta suma o diferencia resultante.

Ejemplo:

a) Factorizar el trinomio $x^2 + 6x + 9$

Solución: se extrae la raíz cuadrada a los términos cuadráticos x^2 y 9

$$\sqrt{x^2} = x \ ; \ \sqrt{9} = 3$$

se agrupan las raíces con el signo del término $6x$ (segundo término)

$$\left(x+3\right)$$

y se eleva al cuadrado el binomio formado

$$\left(x+3\right)^2$$

Al desarrollar el binomio al cuadrado resultante se obtiene el trinomio cuadrado perfecto

$$\left(x+3\right)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Sin embargo, no todos los trinomios con dos términos cuadráticos son trinomios cuadrados perfectos, como el caso siguiente:

b) Factorizar el trinomio $x^2 + 8x + 9$

Se extrae la raíz cuadrada a los términos cuadráticos x^2 y 9

$$\sqrt{x^2} = x \ ; \ \sqrt{9} = 3$$

se agrupan las raíces son el signo del término $6x$ (segundo término)

$$\left(x+3\right)$$

y se eleva al cuadrado el binomio formado

$$\left(x+3\right)^2$$

Pero al desarrollar el cuadrado del binomio resultante

$\left(x+3\right)^2 = x^2 + 6x + 9$

no resulta el trinomio a factorizar $x^2 + 8x + 16$

Solución:

La expresión polinomial es un trinomio cuadrado perfecto ya que tiene dos términos cuadráticos con igual signo: x^2 y 49 , ambos son positivos, y un término que representa el doble producto de las raíces $14x = 2\left(x\right)\left(7\right)$

Respuesta corecta: A) Factorización de un trinomio cuadrado perfecto.

3.3. La factorización de la expresión polinomial $D = x^2 - 14x + 49$ está dada por

- **A)** $\left(x-7\right)^2$
- **B)** $\left(x+7\right)^2$
- **C)** $\left(x+7\right)\left(x-7\right)$
- **D)** $\left(x-14\right)\left(x+49\right)$

Solución:

El polinomio es un trinomio cuadrado perfecto, por lo que su factorización es el cuadrado de la diferencia de las raíces cuadradas de sus términos cuadráticos. Así, se tiene la diferencia $x - 7$, dado que $-14x$ tiene signo negativo.

Respuesta correcta: A) $\left(x-7\right)^2$

3.4 Si se han solicitado 50 unidades del producto, el precio de acuerdo al polinomio D será

A) 799
B) 601
C) 2585
D) 1849

Valor de un polinomio:

Consiste en sustituir la literal o literales que intervienen en el por un valor numérico, realizar las operaciones indicadas de acuerdo con la jerarquía de las operaciones de números reales y de esta manera obtener una cantidad determinada.

Usualmente se denota como $P(x)$, donde P es el nombre del polinomio y x la variable.

Solución:

Al sustituir $x=50$ en el polinomio, tenemos

$$D(x)=D(50)=(50)^2-14(50)+49=1849$$

Respuesta correcta: D) 1849

Situación 4. Factorización

Un estudiante autodidacta está preparando su examen sobre el tema de factorización, para ello consultó varios libros de la biblioteca de su centro escolar y seleccionó algunos para su estudio, encontrando los siguientes ejercicios:

4.1 La factorización de $5m^2p-45n^2p$ es:

A) $5p\left(n-3m\right)\left(n+3m\right)$
B) $5p\left(n+3m\right)\left(n+3m\right)$
C) $5p\left(m+3n\right)\left(m+3n\right)$
D) $5p\left(m-3n\right)\left(m+3n\right)$

Factor común:	$xm + xy + xd + xb = x(m + n + d + b)$
Factorización de una diferencia de cuadrados.	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ $\sqrt{a^2} = a \;\; ; \;\; \sqrt{b^2} = b$

Solución:

$$5m^2p - 45n^2p$$
$$= 5p(m^2 - 9n^2)$$
$$= 5p(m - 3n)(m + 3n)$$

Procedimiento:

$5p$ es el factor común

Se factoriza la diferencia de cuadrados

$m^2 - 9n^2 = (m - 3n)(m + 3n)$

$\sqrt{m^2} = m \; ; \; \sqrt{9n^2} = \sqrt{9}\sqrt{n^2} = 3n$

Respuesta D) $5p(m - 3n)(m + 3n)$

4.2 La expresión $-\frac{1}{3}m^2 - \frac{8}{3}mn - 5n^2$ se factoriza:

A) $-\frac{1}{3}(m - 5n)(m - 3n)$

B) $-\frac{1}{3}(m - 5n)(m + 3n)$

C) $-\frac{1}{3}(m + 5n)(m + 3n)$

D) $-\frac{1}{3}(m + 5n)(m - 3n)$

Factorización de un Trinomio de la Forma $x^2 + px + q$	Este trinomio se factoriza como el producto de dos binomios con término común, que es la raíz cuadrada del término cuadrático. El segundo término de cada binomio serán los números cuya suma sea igual al coeficiente lineal (p) y cuyo productos sea el término independiente (q). $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$

	$\sqrt{x^2}=x$ Término común. $q=ab$ Producto de los términos no comunes. $p=a+b$ Suma de los términos no comunes.

Solución:

$-\frac{1}{3}m^2-\frac{8}{3}mn-5n^2$	Procedimiento
$=-\frac{1}{3}\left(m^2+8mn+15n^2\right)$	$-\frac{1}{3}$ es el como factor común
$=-\frac{1}{3}\left(m+5n\right)\left(m+3n\right)$	Se factoriza el trinomio $m^2+8mn+15n^2$ como producto de binomios con térmno común, siendo $\sqrt{m^2}=m$ el término común.

Respuesta correcta: C) $-\frac{1}{3}\left(m+5n\right)\left(m+3n\right)$

4.3 Al factorizar $7(a+b)m^2+42(a+b)mn+63(a+b)n^2$ se tiene:

A) $7\left(a+b\right)\left(m+3n\right)^2$

B) $7\left(a+b\right)\left(n+3m\right)^2$

C) $7\left(a+b\right)\left(3m+n\right)^2$

D) $7\left(a+b\right)\left(3m+3n\right)^2$

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto (T.C.P.)	$a^2+2ab+b^2=\left(a+b\right)^2$ $\sqrt{a^2}=a;\ \sqrt{b^2}=b$ $a^2-2ab+b^2=\left(a-b\right)^2$ $\sqrt{a^2}=a;\ \sqrt{b^2}=b$

Solución:

$7(a+b)m^2+42(a+b)mn+63(a+b)n^2$

Procedimiento

$=7(a+b)(m^2+6mn+9n^2)$

$7(a+b)$ es el factor común

$=7(a+b)(m+3n)^2$

Se factoriza el trinomio $m^2+6mn+9n^2$
Como trinomio cuadrado perfecto

$\sqrt{m^2}=m$; $\sqrt{9n^2}=3n$

$m^2+6mn+9n^2=(m+3n)^2$

Respuesta A) $7(a+b)(m+3n)^2$

4.4. La factorización de $27a^3-18a^2b-12ab^2+8b^3$ es:

A) $(3a-2b)(3a+2b)^2$

B) $(3a+2b)(3a-2b)^2$

C) $(3b-2a)(3a-2b)^2$

D) $(3a+2b)(3b-2a)^2$

Factorización por agrupación de términos	$xm+xy+am+ay=x(m+y)+a(m+y)$ $=(m+y)(x+a)$

Solución:

$27a^3-18a^2b-12ab^2+8b^3$

$=9a^2(3a-2b)-4b^2(3a-2b)$

Procedimiento

$9a^2$ es el factor común de $27a^3$ y de $-18a^2b$

$=(3a-2b)(9a^2-4b^2)$

Factorizando por agrupación $3a-2b$ es el nuevo factor común

$=(3a-2b)(3a-2b)(3a+2b)$

Se factoriza la diferencia de cuadrados
$9a^2-4b^2=(3a-2b)(3a+2b)$

$=(3a-2b)^2(3a+2b)$

Se expresa $3a+2b$ como binomio al cuadrado.

Respuesta B) $(3a+2b)(3a-2b)^2$

Situación 5 Construyendo Bardas.

En una obra de construcción, un albañil usa ladrillo rojo recocido como material para construir (levantar) una barda cuyo volumen en centímetros cúbicos es representado por el polinomio $1120x^4+688x^3+70x^2+100x$. Cada ladrillo tiene en centímetros $7x-2$ de ancho, $10x+4$ de largo y altura x.

5.1 ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el número de ladrillos necesarios para construir la barda?

A) $16x+8+\dfrac{67x+82}{35x^2+4x-4}$

B) $16x+8+\dfrac{67x+18}{35x^2+4x-4}$

C) $16x+8+\dfrac{-67x-82}{35x^2+4x-4}$

D) $16x+8+\dfrac{-67x-18}{35x^2+4x-4}$

Solución:

El número de ladrillos se obtiene por medio del cociente:

$$\#ladrillos=\frac{volumen_{barda}}{volumen_{ladrillo}}$$

El volumen de cada ladrillo se obtiene de la siguiente manera:

$$volumen_{ladrillo}=(ancho)(l\arg o)(altura)$$

$$volumen_{ladrillo}=(7x-2)(10x+4)(x)$$

$$volumen_{ladrillo}=(70x^2+28x-20x-8)x$$

$$volumen_{ladrillo}=(70x^2+8x-8)x$$

$$volumen_{ladrillo}=70x^3+8x^2-8x$$

Por lo tanto:

$$\#ladrillos=\frac{1120x^4+688x^3+70x^2+100x}{70x^3+8x^2-8x}$$

Al usar factor común para simplificar las expresiones se obtiene:

$$\#ladrillos = \frac{2x\left(560x^3 + 344x^2 + 35x + 50\right)}{2x\left(35x^2 + 4x - 4\right)}$$

$$\#ladrillos = \frac{\left(560x^3 + 344x^2 + 35x + 50\right)}{\left(35x^2 + 4x - 4\right)}$$

Finalmente se realiza la división de polinomios:

$$\begin{array}{r|l} & 16x + 8 \\ \hline 35x^2 + 4x - 4 & 560x^3 + 344x^2 + 35x + 50 \\ & -560x^3 - 64x^2 + 64x \\ \hline & \quad 280x^2 + 99x + 50 \\ & \quad -280x^2 - 32x + 32 \\ \hline & \qquad 67x + 82 \end{array}$$

Respuesta correcta A) $16x + 8 + \dfrac{67x + 82}{35x^2 + 4x - 4}$

5.2 El volumen de cada ladrillo en cm^3 con una altura de 2 cm es:

A) 675

B) 566

C) 576

D) 665

Solución:

Sustituyendo el valor de la altura en la expresión

$volumen_{ladrillo} = (ancho)(l\arg o)(altura)$ se tiene

$$volumen_{ladrillo} = (7x - 2)(10x + 4)(x)$$

$$volumen_{ladrillo} = \left[7(2) - 2\right]\left[10(2) + 4\right](2)$$

$$volumen_{ladrillo} = (14 - 2)(20 + 4)(2)$$

$volumen_{ladrillo} = (12)(24)(2)$

$volumen_{ladrillo} = 576$

Respuesta correcta C) 576

5.3 El volumen de la barda si $x = 2$ cm es:

A) 19776

B) 13568

C) 18224

D) 23904

Solución:

Al sustituir el valor de x en la expresión:

$1120x^4 + 688x^3 + 70x^2 + 100x$, se obtiene:

$1120(2)^4 + 688(2)^3 + 70(2)^2 + 100(2)$

$1120(16) + 688(8) + 70(4) + 200$ elevando las potencias

$17920 + 5504 + 280 + 200$ multiplicando

23904 sumando

Respuesta correcta D) 23920

5.4 ¿Cuántos ladrillos se necesitan para construir la barda si tienen una altura (x) de 2 cm?

A) 40.5

B) 41.5

C) 40.7

D) 41.7

Solución:

Al sustituir el valor de la altura $x = 2$, en la expresión:

$$\#ladrillos = 16x + 8 + \frac{67x + 82}{35x^2 + 4x - 4}$$

$$\#ladrillos = 16(2) + 8 + \frac{67(2) + 82}{35(2)^2 + 4(2) - 4}$$

$$\#ladrillos = 32 + 8 + \frac{134 + 82}{35(4) + 8 - 4}$$

$$\#ladrillos = 40 + \frac{216}{140 + 4}$$

$$\#ladrillos = 41.5$$

Respuesta correcta B) 41.5

ACTIVIDADES DE REFORZAMIENTO

Situación 6. Comprando Libros

Luis compró cuatro libros temáticos de: Historia del Arte, Álgebra, Ajedrez y Economía.

Las dimensiones de los libros son las siguientes:

- El libro de Historia del Arte, el de Álgebra y Ajedrez tienen el mismo ancho a
- El ancho del libro de Economía es igual al triple del ancho de los libros anteriores.
- La longitud del libro de Historia del Arte es el doble de la longitud l del libro de Álgebra.
- La longitud del libro de Ajedrez es $2\ cm$ más que la longitud del libro de Álgebra.
- El libro de Economía tiene la misma longitud del libro de Historia del Arte menos un centímetro
- La altura del libro de Álgebra es $2\ cm$ más que la altura h del libro de Historia del Arte.
- La altura del libro de Ajedrez tiene la mitad de la altura del libro de Álgebra.
- Las alturas de los libros historia del Arte y el de Economía son iguales.

6.1 ¿Cuál es el volumen del libro de Ajedrez?

A) $\frac{(l+2)(h+2)a}{2}$

B) $\frac{(l-2)(h+2)a}{2}$

C) $\frac{(l+2)(h-2)a}{2}$

D) $\frac{(l+2)(h+2)}{2a}$

6.2 Si la altura h del libro de Historia del Arte es de 4 centímetros ¿cuál es el volumen del libro de Álgebra?

A) $8al$

B) $6al$

C) $3(al+2)$

D) $24al$

6.3 El volumen total de los libros está representado por la expresión:

A) $\dfrac{19alh+6al+2h+4ha}{2}$

B) $\dfrac{19al+6alh+2ah+4a}{2}$

C) $\dfrac{19alh+6al+2ah+4a}{2}$

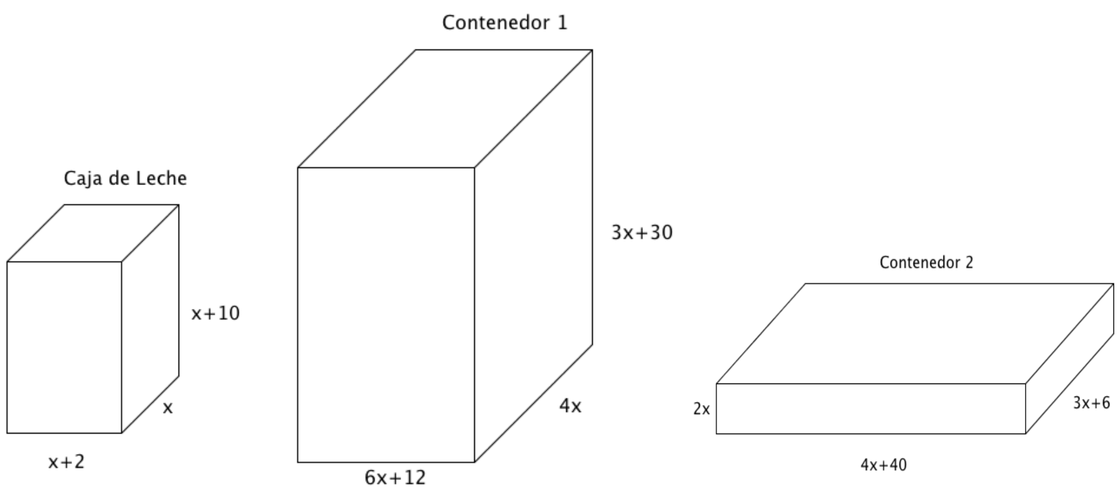
D) $\dfrac{19al+6alh+2a+4ah}{2}$

6.4 Si la longitud $l=20$ cm, el ancho $a=6$ cm, y la altura $h=5$ cm, ¿Cuál es el volumen, en centímetros cúbicos, total de los cuatro libros?

A) 6012
B) 2106
C) 6201
D) 6102

Situación 7. Día de Muertos

Paola y su grupo van a celebrar el día de muertos en su prepa, para lo cual se cooperaron y compraron cajitas de leche de sabores y pan de muerto individual. En casa, Paola tiene dos contenedores que piensa utilizar para llevar las cosas a la prepa. Las dimensiones se muestran a continuación:



7.1 ¿Cuál es el máximo número de cajitas de leche colocadas en el contenedor 1?

A) 39
B) 72
C) 21
D) 24

7.2 ¿Cuál es la relación entre los volúmenes de los contenedores?

- **A)** **A)** El volumen del contenedor 1 es igual al volumen del contenedor 2.
- **B)** El volumen del contenedor 1 es 3 veces el volumen del contenedor 2.
- **C)** El volumen del contenedor 2 es la mitad del del volumen del contenedor 2.
- **D)** El volumen del contenedor 1 es 4 veces el volumen el del contendor 2.

7.3 ¿Cuál es el polinomio que representa el volumen del contenedor 1?

- **A)** $36x^2+168x$
- **B)** $14x^2+92x^2$
- **C)** $24x^2+288x^2+480x$
- **D)** $72x^3+864x^2+1440x$

7.4 ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la base del contenedor 2?

- **A)** $7x+46$
- **B)** $12x^2+36x+240$
- **C)** $12x^2+144x+240$
- **D)** $7x^2+46$

Situación 8. Servicio de internet

Un servicio básico de internet más telefonía cuesta $\$420.00$ al mes y comprende 20 megas de navegación con llamadas ilimitadas a fijos y celulares en más de 90 países. Deseas contratar el servicio plus adicional que amplía los megas con un costo mensual de $\$20.00$ por mega solicitado.

8.1 La expresión algebraica que representa el pago mensual por x megas adicionales es:

- **A)** $420+20x$
- **B)** $420x+20$
- **C)** $420+20+x$
- **D)** $(420+20)x$

8.2 La expresión del pago mensual a 26 megas es:

- **A)** $420+26(20)$
- **B)** $420+20(6)$
- **C)** $(420+20)(6)$
- **D)** $(420+26)(20)$

8.3 ¿Cuántos pesos pagarás por contratar 30 megas de navegación?

- **A)** 1020
- **B)** 4400
- **C)** 460
- **D)** 620

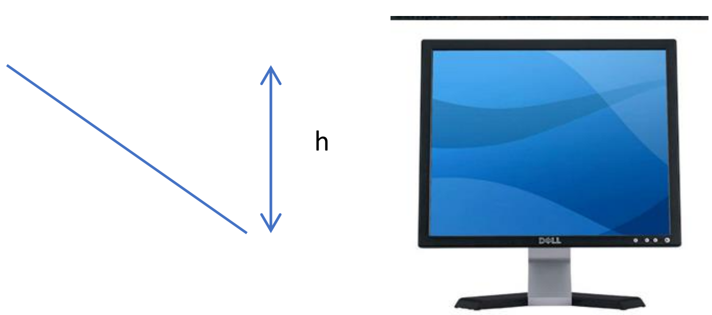
8.4 ¿Cuánto cuesta cada mega, si solo cuentas con tu servicio básico de telefonía más internet?

- **A)** $\$20$
- **B)** $\$30$
- **C)** $\$21$
- **D)** $\$31$

Situación 9. Pantalla de un monitor

Los monitores de computadoras son medidos de la misma forma que las pantallas de televisores, de smartphones y tablets: diagonalmente. Los monitores son usualmente medidos en pulgadas usando una cinta métrica o una regla. Se puede medir un monitor al medir la distancia entre las esquinas opuestas en el área visible de la pantalla. Si colocas cada extremo de la herramienta para medir en la esquina correspondiente, puedes obtener el tamaño oficial del monitor.

La pantalla de un monitor rectangular de computadora tiene tres pulgadas más de longitud que su altura y su diagonal es seis pulgadas más largas que la altura. Sea h la altura.



9.1 ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la longitud del monitor?

- **A)** $3+h$
- **B)** $3h$
- **C)** $6+h$
- **D)** $6h$

9.2 ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la diagonal del monitor?

A) $3+h$

B) $6+h$

C) $3h$

D) $6h$

9.3 Si el medir de esquina a esquina se te hace difícil en una pantalla más grande o simplemente no quieres llenar de huellas el monitor, puedes utilizar el Teorema de Pitágoras para obtener el tamaño de la pantalla. Con base en esto, el enunciado que describe la relación entre la altura, la longitud y la diagonal, en el monitor es:

A) El cuadrado de la suma de seis más la altura es igual al cuadrado de la altura más el cuadrado de la suma de tres más la altura.

B) Seis más la altura al cuadrado es igual al cuadrado de la altura más el cuadrado de la suma de tres más la altura.

C) El cuadrado de la suma de seis más la altura es igual al cuadrado de la altura más el cuadrado de tres más la altura

D) Seis al cuadrado más la altura es igual al cuadrado de la altura más el cuadrado de tres más la altura.

9.4 Si utilizas el Teorema de Pitágoras para obtener el tamaño de la pantalla, el polinomio que resulta de la diferencia entre el polinomio que representa la suma de los cuadrados de los catetos y el polinomio que representa el cuadrado de la diagonal (hipotenusa) es

A) $h^2-6h+27$

B) $h^2+6h-27$

C) $h^2-6h-27$

D) $h^2+6h+27$

9.5 Si utilizas el Teorema de Pitágoras para obtener el tamaño de la pantalla, la factorización del polinomio que resulta de la diferencia entre el polinomio que representa la suma de los cuadrados de los catetos y el polinomio que representa el cuadrado de la diagonal (hipotenusa) es:

A) $(h+9)(h+3)$

B) $(h+9)(h-3)$

C) $(h-9)(h-3)$

D) $(h-9)(h+3)$

Situación 10. Fábrica de refrescos.

En la fábrica de refrescos Pascualina se comercializa refrescos de manzana, guayaba, naranja, mango y limón. Se manejan envases de diferentes formas y tamaños.

10.1 Se tienen en bodega $6x^2 - 33x + 45$ litros de refresco de manzana y hay cajas que contienen $x - 3$ litros. ¿Cuántas cajas se pueden llenar?

A) 0
B) 6
C) $6x - 15$
D) $-6x + 15$

10.2 Hay cajas que contienen $x - 1$ litros ¿cuántas cajas llenas de refresco de manzana se tienen si hay $6x^2 - 33x + 45$ litros de refresco?

A) 18
B) $6x - 27$
C) 3
D) $6x + 27$

10.3 Si el volumen de cada lata de refresco de naranja es $x^3 + 5x^2 + 6x$ centímetros cúbicos y el volumen de las cajas para transportarlas es de $3x^3 + 15x^2 + 20x$ centímetros cúbicos ¿cuántas latas pueden contener cada caja?

A) $10x$
B) 10
C) $3x$
D) 3

10.4 ¿Cuántas latas de refresco de guayaba hay en cada caja si el volumen de la lata es $x^3 + 6x^2 + 15x$ centímetros cúbicos y el de la caja es de $5x^3 + 20x^2 + 9x$?

A) 10
B) 5
C) $-10(x + 3)$
D) $5(x + 3)$

ANEXO

Producto Notable	Factorización
	Factor común $xm+xy+xd+xb=x\left(m+n+d+b\right)$
Cuadrado de un Binomio $\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$ $\left(a-b\right)^2=a^2-2ab+b^2$	Trinomio Cuadrado Perfecto (T.C.P.) $a^2+2ab+b^2=\left(a+b\right)^2$ $\sqrt{a^2}=a;\ \sqrt{b^2}=b$ $a^2-2ab+b^2=\left(a-b\right)^2$ $\sqrt{a^2}=a;\ \sqrt{b^2}=b$
Cubo de un Binomio $\left(a+b\right)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $\left(a-b\right)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	Cubo Perfecto $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=\left(a+b\right)^3$ $\sqrt[3]{a^3}=a\ ;\ \sqrt[3]{b^3}=b$ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=\left(a-b\right)^3$ $\sqrt[3]{a^3}=a\ ;\ \sqrt[3]{b^3}=b$
Binomios Conjugados $\left(a+b\right)\left(a-b\right)=a^2-b^2$	Diferencia de Cuadrados $a^2-b^2=\left(a+b\right)\left(a-b\right)$ $\sqrt{a^2}=a\ ;\ \sqrt{b^2}=b$
Binomios con término común $\left(x+a\right)\left(x+b\right)=x^2+\left(a+b\right)x+ab$	Trinomio de la forma $x^2+px+q=\left(x+a\right)\left(x+b\right)$ $\sqrt{x^2}=x$ Término común. $q=ab$ Producto de los términos no comunes. $p=a+b$ Suma de los términos no comunes.
Productos especiales $\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)=x^3+y^3$ $\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)=x^3-y^3$	Suma y diferencia de Cubos $x^3+y^3=\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)$ $\sqrt[3]{x^3}=x\ ;\ \sqrt[3]{y^3}=y$

	$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ $\sqrt[3]{x^3} = x$; $\sqrt[3]{y^3} = y$
	Factorización por Agrupación: $xm + xy + am + ay = x(m + y) + a(m + y)$ $= (m + y)(x + a)$

RESPUESTAS A LAS ACTIVIDADES DE REFORZAMIENTO

6.1 A)	6.2 B)	6.3 C)	6.4 D)	
7.1 B)	7.2 B)	7.3 D)	7.4 C)	
8.1 A)	8.2 B)	8.3 D)	8.4 C)	
9.1 A)	9.2 B)	9.3 A)	9.4 C)	9.5 D)
10.1 C)	10.2 B)	10.3 D)	10.4 B)	

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ángel, A. R. y Runde, D. (2013). Álgebra intermedia. México: Pearson Educación.

Bello, I. (2009). Álgebra Intermedia. Un enfoque el mundo real. México: McGraw Hill.

Larson, Roland E; Hostetler, Roberte, Nept Carolyn F. (2000). Álgebra. México. McGraw-Hill

R. David Gustafson. (1996). Álgebra Intermedia. México.Thomson Editores

UNIDAD 3. ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO PARA MODELAR CONDICIONES ESPECÍFICAS EN UNA FUNCIÓN

Objetivo

El alumno:

Desarrollará habilidades de razonamiento lógico, abstracción, generalización y comunicación matemática al: representar fenómenos o eventos que se modelen mediante una función lineal o cuadrática y plantear una ecuación de primer o segundo grado con una incógnita para satisfacer condiciones específicas; resolver las ecuaciones aplicando las propiedades de la igualdad y de los números reales; interpretar y validar los resultados de una ecuación en el contexto de la situación o fenómeno analizado para tomar decisiones; fundamentar el procedimiento seleccionado.

Situación 1. Ahorra hoy y disfruta mañana

Ahorrar, puede ayudarte a cumplir tus metas a corto, mediano o largo plazo; por ejemplo, comprar algo que deseas, viajar o disponer de efectivo en caso de un imprevisto. Si eres estudiante y no cuentas con la mayoría de edad, puedes abrir una cuenta bancaria a tu nombre y sin tutor para recibir una beca e iniciar la bancarización a temprana edad.

La mayoría de los bancos en México ofrecen una cuenta de ahorro para jóvenes y lo más recomendable al momento de contratarla es elegir el banco que ofrezca mayores rendimientos y que cobre menos comisiones en la anualidad, reposición de la tarjeta o el mantenimiento de un saldo mínimo mensual. La Tabla 3.1 Muestra ejemplos de cuentas para jóvenes en 4 diferentes bancos.

	Banco Sur	**Banco Mexicano**	**Banco Comercial**	**Banco de Inversión**
Monto mínimo de apertura	$\$500$	$\$500$	$\$1$	$\$500$
Rango de edad	Entre 12 y 23 años	Entre 12 y 23 años	Hasta 18 años	Hasta 18 años
Saldo promedio mínimo	$\$500$ al mes	No aplica	$\$100$ al mes	No aplica

Rendimientos Ganancia Anual Total Nominal (GAT)	0.50 % anual	0.31 % anual	0.20 % anual	0.10 % anual

Tabla 3.1

1.1 Iván invierte un capital C en el Banco Sur, ¿cuál es el modelo que le permite determinar el interés simple ganado en tres años?

- **A)** $I = 0.015C$
- **B)** $I = (0.005C)^3$
- **C)** $I = 0.005C$
- **D)** $I = 0.15C$

Solución:

El interés simple (I) es el dinero que ganas por realizar una inversión y se calcula al multiplicar el capital inicial (C), el tiempo (t) y la tasa (r) escrita como número decimal.

Lo anterior se expresa como:

$$I = Crt$$

Entonces, la cantidad que se desea conocer es el interés simple que se obtiene al sustituir los datos y realizar la multiplicación. Los datos conocidos son: $r = 0.005$ y $t = 3\ \textit{años}$, se tiene que:

$$I = 3(0.005)C$$
$$I = 0.015C$$

Así, el interés simple ganado en tres años se obtiene mediante el modelo $0.015C$.

Respuesta correcta: A) $I = 0.015C$

1.2 Iván decidió abrir su cuenta de ahorros con $\$8,000$ por 2 años porque piensa emplearlos en su fiesta de graduación, ¿en qué banco le conviene hacerlo si quiere mantener el saldo promedio mínimo en la cuenta?

- **A)** En Banco de Inversión
- **B)** En Banco Comercial
- **C)** En Banco Sur
- **D)** En Banco Mexicano

Solución:

En la situación Iván tiene cuatro opciones de bancos que puede escoger para abrir su cuenta de ahorros. Para todos los bancos se cumple tener el monto mínimo de apertura, debido a que:

$$\$8,000 > \$500 \text{ o } \$8,000 > \$1$$

Se debe calcular para cada una de las opciones de inversión, el interés simple a generar en dos años y sumarlo al capital inicial, sin olvidar que algunas inversiones necesitan un saldo promedio mínimo, lo que implicaría que no se puede disponer de todo el dinero de forma inmediata.

Para el Banco Sur se tendría que los intereses son:

$$I = Crt$$
$$I = (8000)(0.005)(2)$$
$$I = 80$$

Esto indica que Iván al invertir $\$8,000$ durante 2 años, recibirá un interés simple de $\$80$, es decir, tendrá de saldo en su cuenta un total de $\$8,080$, de los cuales solo podrá disponer de manera inmediata de $\$7,580$ porque debe conservar un saldo promedio mínimo de $\$500$.

La Tabla 3.2 representa de forma resumida los cálculos para cada una de las cuentas a elegir:

	Banco Sur	**Banco Mexicano**	**Banco Comercial**	**Banco de Inversión**
Saldo promedio mínimo	$\$500$ al mes	No aplica	$\$100$ al mes	No aplica
Capital inicial a invertir	$\$8000$	$\$8000$	$\$8000$	$\$8000$
Tasa de interés simple	0.50% anual	0.31% anual	0.20% anual	0.10% anual
Tiempo en años	2 años	2 años	2 años	2 años

Interés simple $I = Crt$	$I = 16000(0.005)$ $I = 80$	$I = 16000(0.0031)$ $I = 49.6$	$I = 16000(.002)$ $I = 32$	$I = 16000(.001)$ $I = 16$
Cantidad que puede retirar en 2 años	$8080 - 500$ Puede retirar $\$7580$	$8049.60 - 0$ Puede retirar $\$8049$	$8032 - 100$ Puede retirar $\$7932$	$8016 - 0$ Puede retirar $\$8016$

Tabla 3.2

Por lo tanto, a Iván le conviene invertir su dinero en el Banco Mexicano.

Respuesta correcta: D) En Banco Mexicano

1.3 David piensa que sería una mejor idea invertir su capital C, con una tasa anual de 0.50%, mediante un modelo de interés compuesto a 2 años. Al preguntar en el banco, le indican que los intereses ganados se obtienen mediante la fórmula $I = C\left[(1+r)^t - 1\right]$. Al realizar los cálculos, David llega a la siguiente expresión:

$$C\left[(1.005)^2 - 1\right] = 0.010025C$$

La expresión anterior es un ejemplo de:

A) Producto notable
B) Una identidad
C) Trinomio cuadrado perfecto
D) Una ecuación

Igualdad, ecuación e identidad

Una *igualdad* establece que dos expresiones aritméticas o algebraicas son iguales, es decir, tienen el mismo valor o representan lo mismo.

Una *ecuación* es una igualdad que contiene una o más cantidades desconocidas llamadas incógnitas y es verdadera para algunos valores de las incógnitas.

Una *identidad* es una igualdad que se verifica siempre, es decir, para todo valor de las incógnitas.

Solución:

La igualdad $C\left[(1.005)^2 - 1\right] = 0.010025C$ se verifica para cualquier valor que tome el capital C, por ejemplo, si $C=1$, se tiene:

$$(1)\left[(1.005)^2 - 1\right] = 0.010025(1)$$
$$\left[(1.005)^2 - 1\right] = 0.010025$$
$$[1.010025 - 1] = 0.010025$$
$$0.010025 = 0.010025$$

Si $C=3$, se tiene:

$$(3)\left[(1.005)^2 - 1\right] = 0.010025(3)$$
$$(3)[1.010025 - 1] = 0.030075$$
$$(3)[0.010025] = 0.030075$$
$$0.030075 = 0.030075$$

Al realizar este mismo procedimiento para cualquier valor C, se observa que la igualdad se verifica siempre, por lo tanto, se trata de una identidad.

Respuesta correcta: B) Una identidad

1.4 Rosa quiere comprar un teléfono celular que cuesta $\$5,000$ y tiene ahorrados $\$4,250$ ¿cuál deberá ser la tasa de interés simple que debería ofrecer un banco para que al invertir sus ahorros un año pueda comprar el teléfono?

A) 22.16%
B) 27.35%
C) 17.64%
D) 15.10%

Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado en una variable es aquella que puede escribirse de la forma

$$ax+b=c$$

Donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y x es una variable.
El primer miembro está formado por la o las expresiones colocadas a la izquierda del símbolo de igual ($=$) y el segundo miembro por las que se encuentran a la derecha.

Para solucionar una ecuación de primer grado en una incógnita, se despeja ésta de acuerdo con las propiedades de la igualdad, al obtener ecuaciones equivalentes hasta llegar a una expresión donde la incógnita sea igual a un número o a una literal.

Propiedades de la Igualdad

Si a, b y c son números reales y n es un número natural, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

Para la suma Si $a=b$, entonces $a+c=b+c$	Sumar un mismo número en ambos lados de una igualdad, no la altera.
Para la resta Si $a=b$, entonces $a-c=b-c$	Restar un mismo número en ambos lados de una igualdad, no la altera.
Para la multiplicación Si $a=b$, entonces $ac=bc$	Multiplicar ambos lados de la igualdad por un mismo número, no la altera.
Para la división Si $a=b$, entonces $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}, \quad c \neq 0$	Dividir ambos lados de la igualdad por un mismo número (distinto de cero), no la altera.
Para la potencia Si $a=b$, entonces $a^n=b^n$	Elevar a la misma potencia ambos lados de una igualdad, no la altera.
Para la raíz Si $a=b$, entonces $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$	Calcular la raíz n-ésima en ambos lados de una igualdad (si esta operación es posible de realizar), no la altera.

Solución:

Los datos del problema indican que si al costo del celular ($\$5,000$) se le resta lo que tiene ahorrado Rosa ($\$4,250$), se sabrá la cantidad faltante para la compra, es decir $\$750$. Se conoce que $I=750$, $C=4250$ y $t=1$, al sustituir estos valores en la fórmula de interés simple se tiene la siguiente ecuación:

$$750 = (4250)(r)(1)$$
$$750 = 4250r$$

Para despejar r, la tasa de interés expresada en forma decimal, se aplicará la propiedad de la igualdad para la división, es decir, se dividirán ambos miembros entre 4250:

$$\frac{750}{4250} = \frac{4250r}{4250}$$
$$\frac{750}{4250} = r$$

Al efectuar la división se tiene $r \approx 0.1764$. Esto significa que Rosa debe buscar algún banco que ofrezca una tasa de interés simple del 17.64% anual, para poder comprar su celular.

Respuesta correcta: C) 17.64%

Situación 2. Costo del transporte público en la Ciudad de México

En el año 2019 en la capital del país, los usuarios del transporte público deben pagar los siguientes costos, en pesos, por viaje:

Para unidades en corredores concesionados, un precio ordinario de $\$6.50$ y en servicio ejecutivo aumenta $\$0.50$.

Para microbuses y autobuses el precio queda de la siguiente manera (Tabla 3.3):

Kilómetros	Microbuses y vagonetas	Autobuses
5 km	$\$5.00$	$\$6.00$
Más de 5 Km	$\$5.50$ a $\$6.50$	$\$7.00$

Tabla 3.3

El Sistema de Transporte Colectivo que abarca el Metro, Metrobús, Trolebús y Tren Ligero continúan con las mismas tarifas desde 2016, es decir, $\$5.00$, $\$6.00$, $\$4.00$ y $\$3.00$ respectivamente.

Desde 2017 no se han modificado los costos para los usuarios de taxis, estos precios se muestran en la tabla 3.4:

Taxi de sitio	Banderazo $\$13.10$ y $\$1.20$ por cada 43 segundos (s) o 250 metros (m)

Taxi Libre	Banderazo $\$8.74$ y $\$1.07$ por cada 45 segundos o 250 metros

Tabla 3.4

2.1 Diego y tres amigos se encuentran en Ciudad Universitaria y desean ir al centro de Coyoacán. Debido a que es tarde y no hay tráfico deciden tomar un taxi libre. Determina cuál de las siguientes expresiones modela el pago que realiza por x kilómetros recorridos, considera que cada $45\,s$ se recorren $250\,m$.

A) $13.10+4(1.20)x$
B) $8.74+1.07x$
C) $8.74+4(1.07)x$
D) $13.10-1.20x$

Solución:

Por el contexto de la situación se sabe que la tarifa base de un taxi libre es de $\$8.74$ y que se cobran $\$1.07$ por cada $45\,s$ o $250\,m$ recorridos, en este caso se trabajara con la distancia, debido a que se solicita una expresión que modele los x kilómetros recorridos.

Además se debe hacer notar que se piden kilómetros recorridos, por lo cual en cada kilómetro se cobra 4 veces la cantidad de $\$1.07$ debido a que cada kilómetro tiene 4 fracciones de $250\,m$.

Por ejemplo, si solo se recorre un kilómetro se deberá pagar la tarifa base más 4 veces la cantidad de $\$1.07$; si se recorren dos kilómetros de deberá pagar la tarifa base más 8 veces la cantidad de $\$1.07$ y así sucesivamente. Lo anterior se puede resumir con la expresión:

$$8.74+4(1.07)x$$

Respuesta correcta: C) $8.74+4(1.07)x$

2.2 ¿A cuántos kilómetros se encontraban los cuatro amigos del centro de Coyoacán si pagaron $\$46.70$ al abordar un taxi de sitio? Considera que cada $43\,s$ se recorren $250\,m$.

A) 11
B) 5
C) 13
D) 7

Solución:

Por la situación se conoce que un taxi de sitio cobra $\$13.10$ como tarifa base y un extra de $\$1.20$ cada que transcurren $43s$ o se recorren $250m$, para este problema se trabajara con la distancia y se debe considerar que en cada kilómetro recorrido se cobrara 4 veces la cantidad de $\$1.20$, debido a que cada kilómetro contiene 4 fracciones de $250m$ cada una.

Esto indica que por ejemplo, si solo se recorre un kilómetro de deberá pagar la tarifa base más 4 veces la cantidad de $\$1.20$; al recorrer dos kilómetros de deberá pagar la tarifa base más 8 veces la cantidad de $\$1.20$ y así sucesivamente. Lo anterior se puede resumir con la expresión:

$$13.10+4(1.20)x$$

Para saber cuántos kilómetros recorrieron se resuelve la siguiente ecuación:

$$13.10+4(1.20)x=46.70$$

De lo anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} 13.10+4(1.20)x &= 46.70 \\ 4(1.20)x &= 46.70-13.10 \\ 4.80x &= 33.60 \\ x &= \frac{33.60}{4.80} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si los cuatro amigos pagaron $\$46.70$ al abordar un taxi de sitio, se encontraban a $7km$ de su destino.

Respuesta correcta: D) 7

2.3 Si Diego y sus tres amigos hubieran preferido llegar a Coyoacán que se encuentra a aproximadamente $7km$ de Ciudad Universitaria, transportándose en metro y posteriormente en autobús, con un costo de $\$5.00$ y $\$6.00$ respectivamente, ¿cuál de las opciones de transporte es la más económica?

A) Sería una mejor opción tomar un taxi de sitio
B) Sería una mejor opción tomar un taxi libre
C) Es igualmente conveniente tomar trasporte público que un taxi de sitio
D) Es igualmente conveniente tomar trasporte público que un taxi libre

Solución:

El destino se encuentra a aproximadamente a $7km$ de Ciudad Universitaria y para saber qué afirmación es verdadera se tiene que comparar el costo de las tres opciones de viaje: taxi libre, taxi de sitio y transporte público.

Para saber el costo de viaje en un taxi libre, se emplea la siguiente expresión $8.74+4(1.07)x$ y se sustituye el valor de x por 7:

$$\begin{aligned} 8.74+4(1.07)(7) &= 8.74+4.28(7) \\ &= 8.74+29.96 \\ &= 38.70 \end{aligned}$$

Esto indica que para llegar al centro de en un taxi libre a Coyoacán se pagan $\$38.70$ y un viaje de $7km$ en un taxi de sitio se pagan $\$46.70$.

Por último, si los 4 amigos deciden tomar transporte público deberán pagar 4 boletos del metro y 4 pasajes de autobús, por lo cual se tendría:

$$\begin{aligned} 4(5)+4(6) &= 20+24 \\ &= 44 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si viajan en transporte público, se gastará un total de $\$44.00$.

De todo lo anterior se tiene la siguiente relación:

$$38.70 < 44 < 46.70$$

Lo que indica que es más económico viajar 4 personas en un taxi libre que, en transporte público, pero es más barato que esas mismas 4 personas viajen en transporte público que en taxi de sitio.

Respuesta correcta: B) Sería una mejor opción tomar un taxi libre

2.4 Si dos personas parten del mismo punto y van hacia el mismo sitio, pero una toma un taxi de sitio y la otra un taxi libre, ¿cuánto suma la duración de sus viajes?, considera que la diferencia de las tarifas fue de $\$36.32$ y es indistinto el cobro por tiempo o metros recorridos.

A) 129
B) 7740
C) 246
D) 4770

Solución:

Se desea conocer la duración en minutos del viaje en ambos taxis, pero el costo se toma en diferentes intervalos de tiempo, para el taxi libre en intervalos de $45\,s$ y para el taxi de sitio en intervalos de $43\,s$. Por esta razón es conveniente manejar las expresiones en segundos y no en minutos.

Como se desea conocer la duración, en segundos, del viaje se tendrían las siguientes relaciones: para el costo de un viaje en taxi libre $8.74+\frac{1.07}{45}x$, donde x son los segundos que duró el viaje. Mientras que para un viaje en taxi de sitio se tendría que $13.10+\frac{1.20}{43}x$, donde x son los segundos que duró el viaje.

Como el costo de un viaje en taxi de sitio siempre es mayor y la diferencia entre los costos fue de $\$36.32$, se tendría la siguiente ecuación:

$$\left(13.10+\frac{1.20}{43}x\right)-\left(8.74+\frac{1.07}{45}x\right)=36.32$$

Para resolverla como primer paso se quitan los paréntesis y se simplifican los términos del lado izquierdo de la igualdad, para posteriormente despejar a x:

$$\left(13.10+\frac{1.20}{43}x\right)-\left(8.74+\frac{1.07}{45}x\right)=36.32$$

$$13.10+\frac{1.20}{43}x-8.74-\frac{1.07}{45}x=36.32$$

$$4.36+\frac{7.99}{1935}x=36.32$$

$$\frac{7.99}{1935}x=36.32-4.36$$

$$\frac{7.99}{1935}x=31.96$$

$$x=\frac{(1935)31.96}{7.99}$$

$$x=7740$$

Por lo tanto, los taxis viajaron un total de $7740\,s$ y al dividir esta cantidad entre 60 segundos se obtienen los minutos que duró el viaje, es decir:

$$\frac{7740}{60}=129$$

El viaje de ambos taxis duró $129\ \text{min}$ y se pagó una diferencia de $\$36.32$ entre los costos de un taxi de sitio y uno libre.

Respuesta correcta: A) 129

Situación 3. Trabajo Internacional

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), creada en 1961, se integra por 34 países industrializados que desarrollan y promueven diversas políticas económicas y sociales.

En 2017, la OCDE publicó las Perspectivas de empleo, donde se menciona el promedio de horas trabajadas por persona cada año, es importante mencionar que México se encuentra en primer lugar con un promedio de 2225 horas. En la Tabla 3.5 se muestran las horas semanales promedio trabajadas por algunos países miembros:

Posición	**País**	**Promedio de horas trabajadas por persona a la semana**
1	México	45
2	Costa Rica	44
3	Corea del Sur	41

4	Grecia	41
5	Rusia	39
14	Turquía	37
16	Estados Unidos	36
22	Japón	34
26	Reino Unido	34
38	Alemania	27

Tabla 3.5

3.1 Juan, que labora en México, trabajará en un proyecto internacional con Hänsel, que reside y labora en Alemania. Si el promedio de horas semanales trabajadas de ambos coincide con los publicados por la OCDE; además a Juan le tomaría 3 semanas realizar solo el trabajo y por su parte a Hänsel 2 semanas, ¿cuántas horas les llevará realizar el proyecto en conjunto?

A) $\frac{135}{8}$

B) 172

C) 189

D) $\frac{270}{7}$

Solución:

Por la situación se conoce que una persona mexicana trabaja en promedio 45 horas a la semana, como Juan tarda 3 semanas en realizar el trabajo, invertiría 135 horas en total. De la misma manera un alemán promedio trabaja 27 horas a la semana, si Hänsel tarda 2 semanas en terminar el trabajo invertirá 54 horas en total.

La incógnita del problema es el tiempo, t, que tardarán ambas personas en hacer el proyecto juntos. En la tabla 3.6 se puede resumir la información anterior:

Trabajador	Razón de trabajo	Tiempo de trabajo	Parte del proyecto realizado
Juan	$\frac{1}{135}$	t	$\frac{t}{135}$
Hänsel	$\frac{1}{54}$	t	$\frac{t}{54}$

Tabla 3.6

De lo anterior se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{t}{135}+\frac{t}{54}=1$$

Para despejar t se realiza lo siguiente, primero para quitar los denominadores se multiplica por su mínimo común múltiplo a ambos lados de la ecuación, para este caso por 270:

$$270\left(\frac{t}{135}+\frac{t}{54}\right)=1(270)$$
$$2t+5t=270$$

Esto resulta en una ecuación lineal donde es fácil despejar a t:

$$2t+5t=270$$
$$7t=270$$
$$t=\frac{270}{7}$$

Por lo que a Juan y Hänsel les tomaría realizar el proyecto en forma conjunta un total de $\frac{270}{7}$ horas, es decir, aproximadamente 38.5 horas.

Respuesta correcta: D) $\frac{270}{7}$

3.2 Juan y Hänsel invitan a Olga, quien labora en Rusia, para unirse a su proyecto. Con su ayuda, logran terminar el proyecto en solo 20 horas, ¿en cuántas semanas Olga realizaría el proyecto sola?

A) 108

B) $\frac{180}{169}$

C) $\frac{540}{13}$

D) 130

Solución:

Juan realiza el trabajo en 135 horas y Hänsel en 54; como Olga es rusa trabaja a la semana en promedio 39 horas. Si t es el número de semanas en que Olga realiza el trabajo, se tomaría un tiempo equivalente a $39t$ horas en terminarlo:

En la tabla 3.7 se resumen los datos proporcionados:

Trabajador	Tasa de trabajo	Tiempo de trabajo	Parte del proyecto realizado
Juan	$\frac{1}{135}$	20	$\frac{20}{135}$
Hänsel	$\frac{1}{54}$	20	$\frac{20}{54}$

Olga	$\frac{1}{39t}$	20	$\frac{20}{39t}$

Tabla 3.7

Por la tabla anterior se deduce la siguiente ecuación:

$$\frac{20}{135}+\frac{20}{54}+\frac{20}{39t}=1$$
$$\frac{4}{27}+\frac{10}{27}+\frac{20}{39t}=1$$

Para eliminar los denominadores se multiplica ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de 27 y $39t$, el cual es $351t$:

$$351t\left(\frac{4}{27}+\frac{10}{27}+\frac{20}{39t}\right)=1(351t)$$
$$13t(4)+13t(10)+9(20)=351t$$

De lo anterior se obtiene una ecuación entera, donde es más fácil despejar t, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}13t(4)+13t(10)+9(20)&=351t\\52t+130t+180&=351t\\182t+180&=351t\\180&=351t-182t\\180&=169t\\\frac{180}{169}&=t\end{aligned}$$

Se concluye que Olga realiza el proyecto sola en aproximadamente $\frac{180}{169}$ semanas, aproximadamente 1.06 semanas.

Respuesta correcta: B) $\frac{180}{169}$

3.3 Al terminar el proyecto, Juan y Hänsel deciden reunirse con Olga en Rusia para celebrar. Al llegar al aeropuerto, Juan decide rentar un coche y Hänsel toma el tren por lo que llega 2 horas antes que Juan, si Olga vive a una distancia de $200\,km$ del aeropuerto, ¿a cuántos kilómetros por hora conduce Juan, si se sabe que el tren es dos veces más rápido?

A) 100
B) 75
C) 50
D) 150

Solución:

Se desea saber la rapidez, r, en kilómetros por hora a la cual viaja el automóvil de Juan. Como el tren es dos veces más rápido, viaja a $2r$ kilómetros por hora. Para calcular el tiempo de viaje se despeja éste de la fórmula de rapidez:

$$tiempo = \frac{distancia}{rapidez}$$

Los datos se pueden organizar como se muestra en la tabla 3.8:

	Rapidez $\left(\frac{km}{h}\right)$	**Distancia** (km)	**Tiempo** (h)
Juan	r	200	$\frac{200}{r}$
Hänsel	$2r$	200	$\frac{200}{2r}$

Tabla 3.8

Lo último que falta considerar es que el tren llega con 2 horas de anticipación, por lo tanto, se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{200}{r} = \frac{200}{2r} + 2$$
$$\frac{200}{r} = \frac{100}{r} + 2$$

Para eliminar los denominadores se multiplican ambos lados de la igualdad por r:

$$r\left(\frac{200}{r}\right) = \left(\frac{100}{r} + 2\right)(r)$$
$$200 = 100 + 2r$$

Por último, se despeja r de la ecuación:

$$
\begin{aligned}
200 &= 100 + 2r \\
200 - 100 &= 2r \\
100 &= 2r \\
\frac{100}{2} &= r \\
50 &= r
\end{aligned}
$$

Se concluye que el automóvil de Juan viaja a una rapidez de $50\frac{km}{h}$.

Respuesta correcta: C) 50

3.4 En su viaje por Rusia, Olga invita a Juan y Hänsel a dar un paseo en bote por el río Moscova, la rapidez del bote con la corriente a favor es de 10 kilómetros por hora, mientras que con la corriente en contra es de 5 kilómetros por hora, ¿cuántos kilómetros se recorrieron en total si corriente abajo navegaron 3 horas menos que corriente arriba?

A) 15
B) 60
C) 30
D) 45

Solución:

Se debe tener en cuenta que el viaje en bote fue de ida y vuelta, por lo tanto, si d representa el total de los kilómetros recorridos por el bote con la corriente a favor, es la misma distancia que se recorre con la corriente en contra.

En la Tabla 3.9 se muestran los datos del problema:

Bote	**Rapidez** $\left(\frac{km}{h}\right)$	**Distancia** (km)	**Tiempo** (h)
Corriente a favor	10	d	$\frac{d}{10}$
Corriente en contra	5	d	$\frac{d}{5}$

Tabla 3.9

La columna de tiempo se obtiene al despejar este elemento de la fórmula de rapidez, es decir, $tiempo = \frac{distancia}{rapidez}$.

Para formar la ecuación que describe el problema, falta considerar que corriente a favor navegaron 3 horas menos que a contracorriente, la ecuación resultante es:

$$\frac{d}{10} = \frac{d}{5} - 3$$

Una forma de eliminar los denominadores es multiplicar ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de 10 y 5, el cual es 10:

$$10\left(\frac{d}{10}\right) = \left(\frac{d}{5} - 3\right)(10)$$
$$d = 2d - 30$$

Y a continuación se despeja a d de la ecuación:

$$d = 2d - 30$$
$$30 = 2d - d$$
$$30 = d$$

Por lo tanto, corriente abajo se recorrieron $30\,km$, pero como el bote regresó al punto de partida, el total de distancia recorrida es de $60\,km$.

Respuesta correcta: B) 60

Situación 4. Alberca Olímpica

La Alberca Olímpica Francisco Márquez es un recinto deportivo en la Ciudad de México donde se celebraron las competencias de natación, saltos, waterpolo y pentatlón moderno de los Juegos Olímpicos de México 1968.

Las instalaciones cuentan con una alberca olímpica, una alberca de calentamiento, una fosa de clavados y una torre de clavados con 4 plataformas.

4.1 Si la alberca olímpica ocupa una superficie de $1050\,m^2$ y el ancho es la mitaddel largo menos $4\,m$, ¿cuáles son las dimensiones del ancho de la alberca?

A) $50\,m$

B) $21m$
C) $25m$
D) $10m$

Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado en una variable es aquella que puede escribirse de la forma

$$ax^2+bx+c=0$$

Donde $a,\mathrm{b},\mathrm{c}\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ y x es una variable.

Para encontrar el valor o valores de x que satisfacen la ecuación, se puede emplear la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Solución:

Para conocer el ancho de la alberca se recurrirá a la fórmula del área de la misma; el área de una alberca rectangular está dada por la formula $A=la$, donde l es el largo y a es el ancho de la alberca.

Por el enunciado del problema se tiene que el área de la alberca es de $1050\,m^2$ y el ancho de la alberca es la mitad menos cuatro metros del largo, es decir, $a=\frac{l}{2}-4$.

Al sustituir estos valores en la fórmula del área, se tiene la siguiente ecuación:

$$1050=l\left(\frac{1}{2}-4\right)$$

Para conocer la medida del largo de la alberca se utiliza la fórmula general para ecuaciones de segundo grado, pero previamente se iguala a cero dicha ecuación:

$$1050=l\left(\frac{1}{2}-4\right)$$

$$1050=\frac{l^2}{2}-4l$$

$$0=\frac{l^2}{2}-4l-1050$$

Para quitar el denominador 2 en el primer término se multiplica por 2 a ambos miembros de la ecuación:

$$l^2 - 8l - 2100 = 0$$

De esta última ecuación, se observa que $a = 1$, $b = -8$ y $c = -2100$. Al sustituir estos valores en la fórmula general se tiene:

$$l = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$l = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-2100)}}{2(1)}$$
$$l = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 8400}}{2}$$
$$l = \frac{8 \pm 92}{2}$$
$$l = \frac{8}{2} \pm \frac{92}{2}$$
$$l = 4 \pm 46$$

De las dos soluciones obtenidas, $l_1 = 4 + 46 = 50$ y $l_2 = 4 - 46 = -42$, la solución negativa queda descartada debido a que el contexto del problema necesita una medida positiva. Luego, se concluye que el largo mide $50m$ y para saber la medida del ancho simplemente se sustituye este valor en la siguiente expresión:

$$a = \frac{l}{2} - 4$$
$$a = \frac{50}{2} - 4$$
$$a = 25 - 4$$
$$a = 21$$

Por lo tanto, el ancho de la alberca es de $21m$.

Respuesta correcta: B) $21m$

4.2 Supón que las dimensiones de la alberca de calentamiento son las de un *rectángulo áureo,* como se muestra en la figura 3.1.

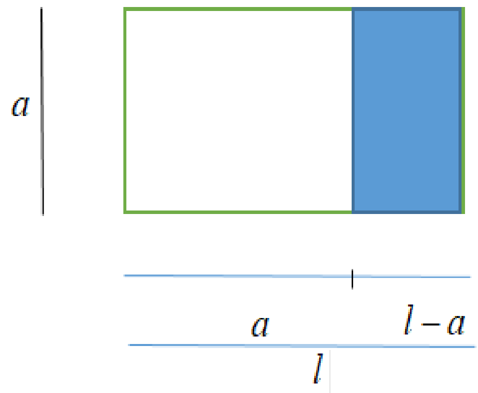


Figura 3.1

Al considerar la relación entre el largo y el ancho de ambos rectángulos, se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{l}{a}=\frac{a}{l-a}$$

¿Cuántos metros mediría el largo si el ancho es de $10m$?

A) $5-5\sqrt{5}$

B) $5-5\sqrt{10}$

C) $5+5\sqrt{5}$

D) $5+5\sqrt{10}$

Discriminante

El discriminante de una ecuación cuadrática es la expresión bajo el signo radical en la fórmula general para ecuaciones de segundo grado, $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, es decir:

$$b^2-4ac$$

Para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ se cumple uno de los siguientes casos:

a) Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
b) Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una única solución real.
c) Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática no tiene por solución números reales, pero sí complejos.

Solución:

Al sustituir la medida del ancho, en la ecuación de proporción aurea se tiene:

$$\frac{l}{a} = \frac{a}{l - a}$$
$$\frac{l}{10} = \frac{10}{l - 10}$$

Esta última expresión, puede ser transformada en una ecuación de segundo grado:

$$\frac{l}{10} = \frac{10}{l - 10}$$
$$(l - 10)(l) = (10)(10)$$
$$l^2 - 10l = 100$$
$$l^2 - 10l - 100 = 0$$

Para saber si la ecuación anterior tiene solución se puede emplear el discriminante, donde $a = 1$, $b = -10$ y $c = -100$:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-10)^2 - 4(1)(-100) \\ &= 100 + 400 \\ &= 500 \end{aligned}$$

Como $500 > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales, las cuales se pueden encontrar al hacer uso de la fórmula general:

$$l = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$l = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-100)}}{2(1)}$$
$$l = \frac{10 \pm \sqrt{500}}{2}$$

Al simplificar el radical se tiene:

$$l = \frac{10 \pm \sqrt{500}}{2}$$
$$l = \frac{10 \pm \sqrt{2^2 5^3}}{2}$$
$$l = \frac{10 \pm 10\sqrt{5}}{2}$$
$$l = \frac{10}{2} \pm \frac{10\sqrt{5}}{2}$$
$$l = 5 \pm 5\sqrt{5}$$

Por lo tanto, las dos soluciones son $l_1 = 5 + 5\sqrt{5}$ y $l_2 = 5 - 5\sqrt{5}$, se descarta la segunda solución debido a que el valor es negativo. Así, el largo de la alberca de calentamiento debe medir $5 + 5\sqrt{5}\,m$.

Respuesta correcta: C) $5 + 5\sqrt{5}$

4.3 La fosa de clavados tiene forma cuadrada y ocupa una superficie de $400m^2$. ¿Cuál será la ecuación que permite encontrar la longitud de su lado l?

A) $l^2 - 400 = 0$
B) $l + 400 = 0$
C) $l - 400 = 0$
D) $l^2 + 400 = 0$

Ecuaciones cuadráticas completas e incompletas:

En una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$:

a) La ecuación es *completa* si b y c son números distintos de cero.
b) La ecuación es *incompleta* si $b = 0$ o $c = 0$, es decir, se pueden tener dos tipos de ecuaciones $ax^2 + c = 0$ o $ax^2 + bx = 0$.

Solución:

Para solucionar este problema se deben relacionar los datos proporcionados con la fórmula del área de un cuadrado, $A = l^2$. Se conoce que el área total debe ser de $400m^2$ y al sustituir este valor en la fórmula de área se obtiene:

$$400 = l^2$$

Al igualar a cero la ecuación anterior se llaga a:

$$l^2 - 400 = 0$$

El resultado es una ecuación cuadrática incompleta donde $b = 0$. Por lo tanto, la ecuación que permite encontrar la longitud del lado l es $l^2 - 400 = 0$.

Respuesta correcta: A) $l^2 - 400 = 0$

4.4 Si un clavadista salta desde la plataforma de $10m$ y su posición está dada por la siguiente ecuación:

$$p = -9t^2 + 13t + 10,$$

donde p se mide en metros y t en segundos

¿Cuál de las siguientes afirmaciones no se cumple?

A) En el instante $t = 0$ el clavadista se encuentra a $10m$.
B) La ecuación de posición es de segundo grado.
C) En el instante $t = 2$ el clavadista toca el agua.
D) El clavadista puede alcanzar una altura de $15m$.

Números complejos e imaginarios

Los *números imaginarios* pueden expresarse como el producto de un número real por la unidad imaginaria:

$$\sqrt{-n} = i\sqrt{n}$$

donde n es cualquier número positivo y la unidad imaginaria i es igual a la raíz cuadrada de -1, es decir:

$$i = \sqrt{-1}$$

Un *número complejo* es un número de la forma $a+bi$, donde a y b son números reales.

Solución:

A continuación, se analizará cada una de las posibles respuestas para saber cuál es falsa.

Para conocer la posición del clavadista en el instante $t=0$, simplemente se evalúa la ecuación en este valor:

$$p = -9t^2 + 13t + 10$$
$$p = -9(0)^2 + 13(0) + 10$$
$$p = 0 + 0 + 10$$
$$p = 10$$

Por lo tanto, es verdad que el clavadista se encuentra a $10m$ en el instante $t=0$.

Se observa que es una ecuación de grado dos y para saber cuándo el clavadista toca el agua, basta con sustituir $p=0$ y resolver la ecuación resultante para t, pues al tocar el agua la posición del clavadista seria de $0m$ con respecto del suelo y de lo anterior se tiene que $0 = -9t^2 + 13t + 10$, donde $a=-9$, $b=13$ y $c=10$:

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$t=\frac{-(13)\pm\sqrt{(13)^2-4(-9)(10)}}{2(-9)}$$

$$t=\frac{-13\pm\sqrt{169+360}}{-18}$$

$$t=\frac{-13\pm\sqrt{529}}{-18}$$

$$t=\frac{-13\pm 23}{-18}$$

$$t=\frac{-13}{-18}\pm\frac{23}{-18}$$

$$t=\frac{13}{18}\pm\frac{-23}{18}$$

Las dos soluciones de la ecuación son:

$$t_1=\frac{13}{18}+\frac{-23}{18}=\frac{13}{18}-\frac{23}{18}=-\frac{10}{18}=-\frac{5}{9}$$

$$t_2=\frac{13}{18}-\frac{-23}{18}=\frac{13}{18}+\frac{23}{18}=\frac{36}{18}=2$$

La primera solución se descarta debido a que es negativa. Por tal motivo es verdad que el clavadista toca el agua a los dos segundos de realizar el clavado.

Para finalizar y comprobar que el clavadista puede o no alcanzar los 15 metros de altura, se sustituye $p=15$ en la ecuación de posición:

$$p=-9t^2+13t+10$$

$$15=-9t^2+13t+10$$

$$9t^2-13t+5=0$$

Al usar el discriminante para $a=9$, $b=-13$ y $c=5$ se obtiene:

$$\begin{aligned} b^2-4ac &= (-13)^2-4(9)(5) \\ &= 169-180 \\ &= -11 \end{aligned}$$

Como $-11<0$ no se tienen soluciones en el conjunto de los números reales, por lo anterior el clavadista no puede alcanzar los $15m$ de altura.

En este último ejemplo, la ecuación si tendría solución en el conjunto de los números complejos, la cual sería:

$$t=\frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4(9)(10)}}{2(9)}$$
$$t=\frac{13\pm\sqrt{-11}}{18}$$

Como $i=\sqrt{-1}$:

$$t=\frac{13\pm\sqrt{-1(11)}}{18}$$
$$t=\frac{13\pm\sqrt{-1}\sqrt{11}}{18}$$
$$t=\frac{13\pm i\sqrt{11}}{18}$$
$$t=\frac{13}{18}\pm\frac{\sqrt{11}}{18}i$$

Se concluye que las dos soluciones complejas de la ecuación son $t_1=\frac{13}{18}+\frac{\sqrt{11}}{18}i$ y $t_2=\frac{13}{18}-\frac{\sqrt{11}}{18}i$.

Respuesta correcta: D) El clavadista puede alcanzar una altura de $15m$.

Situación 5. Sombra

Una lámpara proyecta la siguiente sombra cuadrada contra la pared como se muestra en la Figura 3.2:

Figura 3.2

La sombra aumenta o disminuye de acuerdo a la distancia que se encuentre la lámpara de la pared. La relación entre la distancia de la lámpara y la dimensión de la sombra es directamente proporcional, es decir, si la lámpara está a $1m$ de la pared, la sombra mide $0.5\,m$ de lado; mientras que si la lámpara se encuentra a $2\,m$ de la pared la sombra proyectada mide $1m$ de lado, como se muestra en la Figura 3.3:

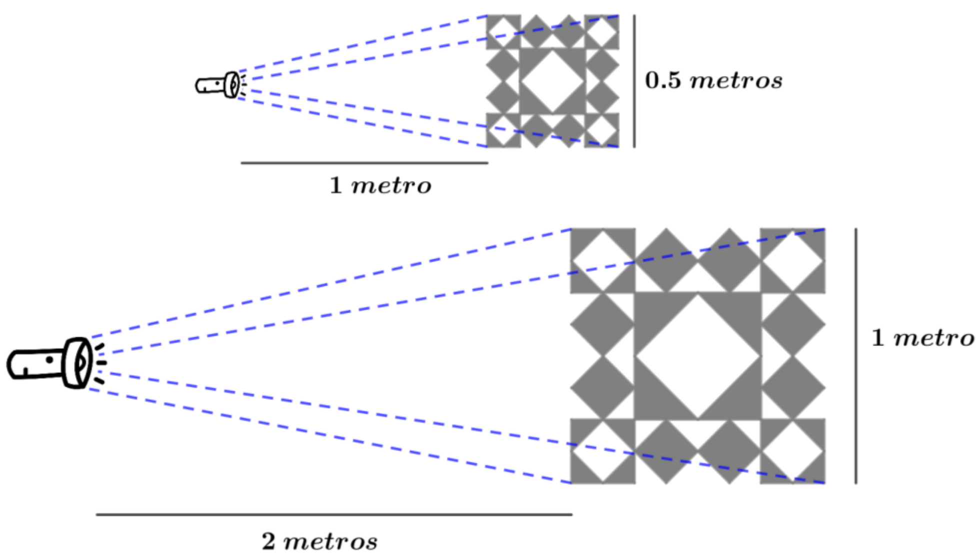


Figura 3.3

5.1 Una expresión que relaciona la longitud de uno de los lados de la sombra en función de la distancia x entre la lámpara y la pared es:

A) $l(x)=x$

B) $l(x)=2x$

C) $l(x)=\frac{x}{2}$

D) $l(x)=\frac{x^2}{4}$

Concepto intuitivo de función

Una función f de un conjunto A a un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x del conjunto A exactamente un elemento y del conjunto B. El conjunto A recibe el nombre de *dominio* de la función y el conjunto B es el *codominio*.

Al usar una ecuación para representar una función, se acostumbra a darle un nombre para facilitar la referencia a ella, por ejemplo, $h(x)$, $d(t)$, $v(h)$, etcétera; el más común es $f(x)$.

El símbolo $f(x)$ se lee como "valor de f en x" o "f de x" y corresponde al valor de y para cada x, es decir, $y=f(x)$.
Se le llama *recorrido* de la función al conjunto formado por todos los valores $f(x)$.

Solución:

La situación habla de una relación directamente proporcional entre la distancia x de la lámpara a la pared y la longitud, $l(x)$, de uno de los lados de la sombra, por lo que se tiene la siguiente función:

$$l(x)=k\cdot x$$

Para obtener el valor de la constante k se consideran los datos de la Figura 3.2:

$$l(x) = k \cdot x$$
$$0.5 = k \cdot 1$$
$$k = \frac{0.5}{1}$$
$$k = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la función $l(x)$ está dada por:

$$l(x) = \frac{x}{2}$$

Respuesta correcta: C) $l(x) = \frac{x}{2}$

5.2 Si la lámpara se coloca a $3m$ de la pared, ¿cuál será el área, en m^2, de la parte sombreada?

A) $\frac{9}{4}$

B) $\frac{9}{8}$

C) 9

D) $\frac{9}{2}$

Solución:

Se observa que la sombra se puede dividir en varios cuadrados, donde la parte sombreada siempre es la mitad de cada uno, como se muestra en la figura 3.4:

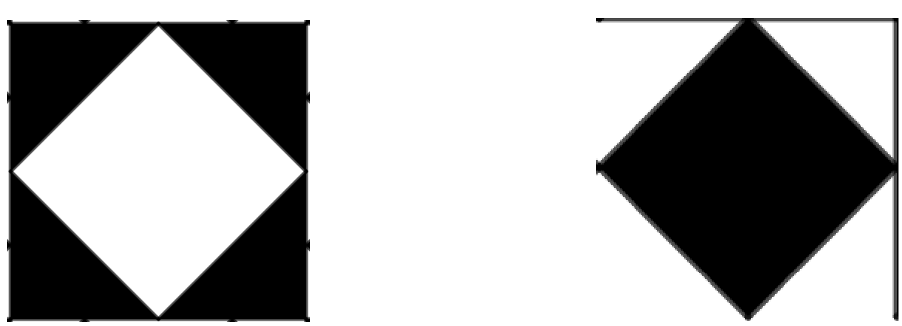


Figura 3.4

Con esto se puede decir que la sombra es la mitad del área del cuadrado proyectado. Al usar la función $l(x)$ se obtiene que el lado del cuadrado mide $\frac{3}{2} = 1.5m$.

Así, el área sombreada estaría dada por la mitad del área del cuadrado del lado $l(x)$:

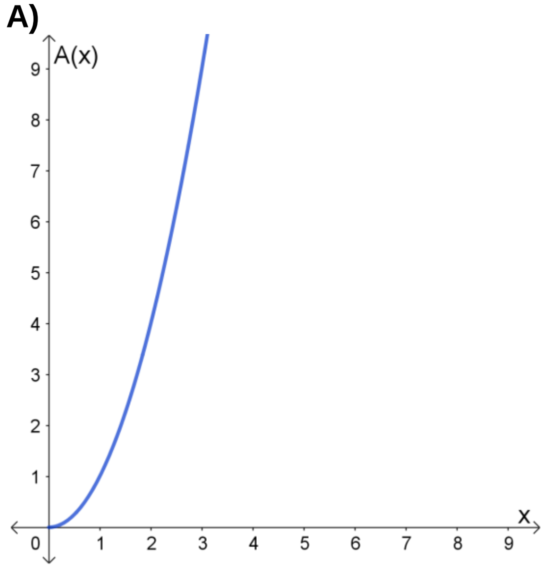
$$A = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} = \frac{\frac{9}{4}}{2} = \frac{9}{8}$$

Por lo tanto, se tiene que si la lámpara se coloca a $3m$ de la pared, el área de la parte sombreada será de $\frac{9}{8} = 1.125\, m^2$

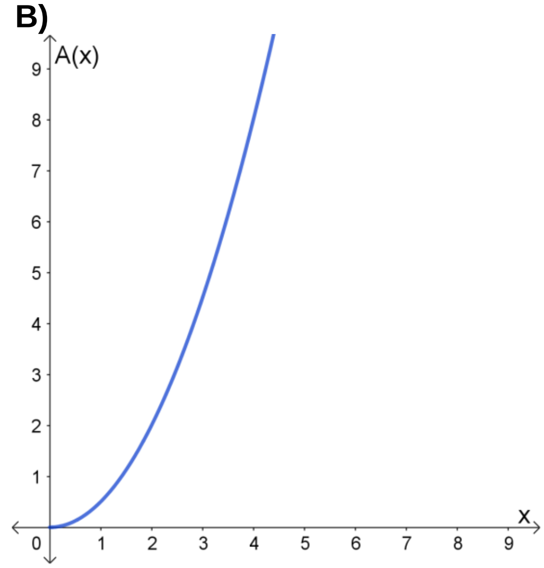
Respuesta correcta: B) $\frac{9}{8}$

5.3 Si se denota por $A(x)$ al área sombreada proyectada, ¿cuál es la gráfica que muestra la relación entre $A(x)$ con la distancia (x) que hay entre la lámpara y la pared?

A)

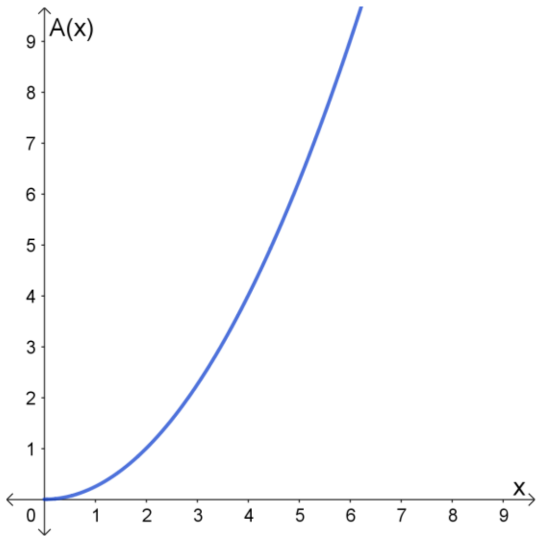


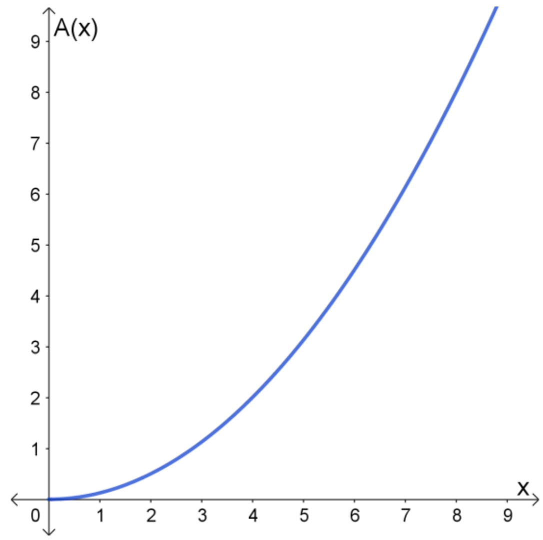
B)



C)

D)





Solución:

El área de la sombra proyectada es la mitad del área del cuadrado. Por lo tanto, se puede ver al área $A(x)$ como la mitad del cuadrado de lado $l(x)$:

$$A(x)=\frac{(l(x))^2}{2}$$

Al simplificar la expresión anterior se tiene:

$$A(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}=\frac{\frac{x^2}{4}}{2}=\frac{x^2}{8}$$

La expresión $A(x)=\frac{x^2}{8}$ relaciona el área de la sombra proyectada con la distancia x a la que se encuentra la lámpara de la pared.

Para graficar se puede hacer una tabulación con valores mayores a 0, como se muestra en la Tabla 3.10:

x	$A(x)$
0	$A(0)=\frac{(0)^2}{8}=0.0$
2	$A(2)=\frac{(2)^2}{8}=0.5$

4	$A(4)=\frac{(4)^2}{8}=2.0$
6	$A(6)=\frac{(6)^2}{8}=4.5$
8	$A(8)=\frac{(8)^2}{8}=8.0$

Tabla 3.10

Al ubicar estos puntos y unirlos se obtiene la siguiente gráfica (figura 3.5):

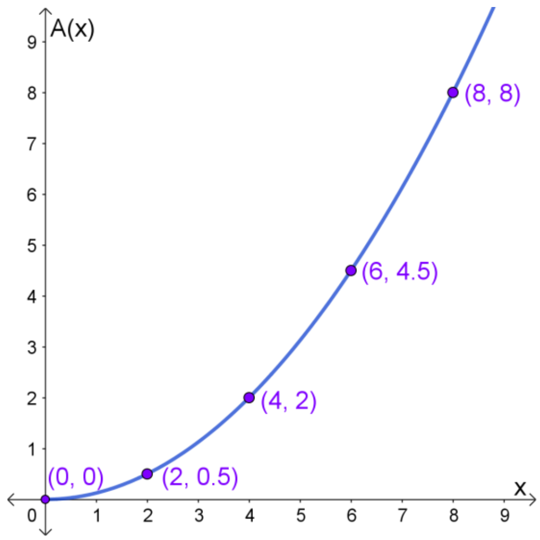
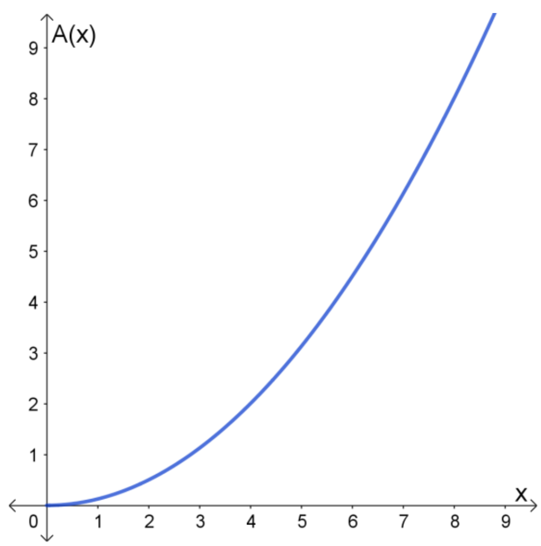


Figura 3.5

Respuesta correcta: D)



5.4 Si se desea tener proyectada una sombra de área $18m^2$, ¿a cuántos metros debe colocarse la lámpara?

A) 12
B) $6\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{2}$
D) 6

Solución:

Por el enunciado del problema se tiene que $A(x)=18$ y se sabe qué $A(x)=\dfrac{x^2}{8}$. Al resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 18 &= \frac{x^2}{8} \\ 8(18) &= x^2 \\ 144 &= x^2 \\ \pm\sqrt{144} &= x \\ \pm 12 &= x \end{aligned}$$

Se observa que se tienen dos soluciones, pero $x=-12$ se descarta debido a que se busca una distancia la cual no puede ser negativa. Por lo tanto, para que se proyecte una sombra de área igual a $18m^2$, la lámpara debe colocarse a $12m$ de la pared.

Respuesta correcta: A) 12

ACTIVIDADES DE REFORZAMIENTO

Situación 6. Compra tu auto

La agencia de autos *La Fortuna,* tiene la siguiente oferta: el auto compacto del año *Bit*, cuesta $\$150,600$ en el modelo de cuatro puertas y $\$166,000$ en el modelo de cinco puertas.

Para el modelo de cinco puertas, también se puede realizar la compra a crédito con un enganche de $\$75,000$, la Tabla 3.11 muestra cuánto se debe pagar cada mes y por cuánto tiempo.

Plazo	24 meses	36 meses	48 meses	60 meses
Precio de venta	$\$166,000$	$\$166,000$	$\$166,000$	$\$166,000$
Enganche	$\$75,000$	$\$75,000$	$\$75,000$	$\$75,000$
Pago mensual	$\$4,648.86$	$\$3,388.45$	$\$2,770.90$	$\$2,471.14$

Tabla 3.11

6.1 La función que permite conocer el costo total del vehículo si se compra a crédito, al considerar un enganche de $\$75,000$, en el plazo t, dado en meses y con una mensualidad m, es:

A) $C = 75000t + m$
B) $C = 75000 - mt$
C) $C = 75000 + mt$
D) $C = 75000m + t$

6.2 Si David compró el auto a un plazo de 36 meses y realizó todos sus pagos puntualmente, ¿cuál será la diferencia en pesos entre comprarlo a crédito o al contado?

A) $\$121,984.20$
B) $\$196,984.20$
C) $\$15,400.00$
D) $\$30,984.20$

6.3 El auto *Bit,* sin importar el modelo tiene un rendimiento de 20.7 kilómetros por litro. Esta semana, Rosa ocupó $\frac{3}{7}$ de la capacidad del tanque de gasolina para ir a su trabajo, $\frac{2}{5}$ para visitar a su mamá y además le sobraron 6 litros. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con el tanque lleno?

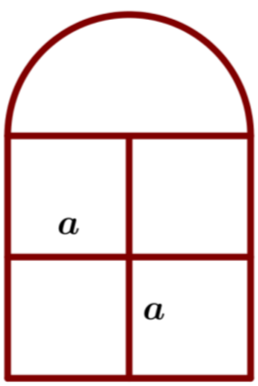
A) 7.245
B) 724.50
C) 72.45
D) 7245.00

6.4 Rosa recorre en su automóvil una distancia descrita por la función $d(t)=8x^2-22x+20$ donde t es el tiempo en horas y d la distancia en kilómetros, ¿para qué valor del tiempo en minutos, la distancia recorrida es de 8 kilómetros?

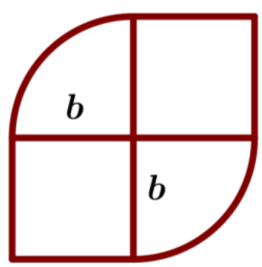
A) $\dfrac{11-\sqrt{39}}{8}$
B) 54
C) 45
D) $\dfrac{11+\sqrt{39}}{8}$

Situación 7. Construcción de ventanas

Un herrero fabrica dos tipos de marcos de ventana de aluminio (Figura 3.6):



Tipo 1



Tipo 2

Figura 3.6

7.1 Si $a = 1m$ y $b = 2a$, cuál de las siguientes relaciones se cumple:

A) El perímetro de la ventana tipo 2 es el doble que el perímetro de la ventana tipo 1.
B) El perímetro de la ventana tipo 2 es mayor que el perímetro de la ventana tipo 1.
C) El perímetro de la ventana tipo 1 es igual que el perímetro de la ventana tipo 2.
D) El perímetro de la ventana tipo 1 es mayor que el perímetro de la ventana tipo 2.

7.2 ¿Cuántos metros debe medir la base de una ventana del tipo 1 si se quiere que su área sea de $10m^2$?

A) $2\sqrt{\dfrac{5}{8+\pi}}$

B) $2\sqrt{\dfrac{5}{4+\pi}}$

C) $\sqrt{\dfrac{5}{4+\pi}}$

D) $4\sqrt{\dfrac{5}{8+\pi}}$

7.3 Un cliente desea comprar una ventana de cada tipo, pero ambas deben tener la misma área. ¿Cuál de las siguientes expresiones permite obtener la medida en metros del segmento b en términos del segmento a de la ventana?

A) $f(a) = a\sqrt{\dfrac{8+\pi}{4+\pi}}$

B) $f(b) = b\sqrt{\dfrac{4+\pi}{8+\pi}}$

C) $f(a) = a\sqrt{\dfrac{4+\pi}{2+\pi}}$

D) $f(b) = b\sqrt{\dfrac{2+\pi}{4+\pi}}$

7.4 El herrero desea elaborar una ventana del tipo 2, pero solo dispone de $15m$ de aluminio para fabricar el marco y las secciones interiores ¿Cuál será el área, en metros cuadrados, de la ventana resultante?

A) $\dfrac{225(4+\pi)}{(8+\pi)^2}$

B) $\dfrac{225}{2(4+\pi)}$

C) $\dfrac{225}{4+\pi}$

D) $\dfrac{225(4+\pi)}{2(8+\pi)^2}$

Situación 8. Cajas

Una empresa de embalaje fabrica cajas cerradas de bases rectangular, cuadrada y circular, donde cada una de ellas puede tener capacidades de 125, 250, 500 y 1000 centímetros cúbicos, como se ilustra en la figura 3.7. Para dicha empresa es importante conocer la cantidad de material y los costos que cada producto tiene.

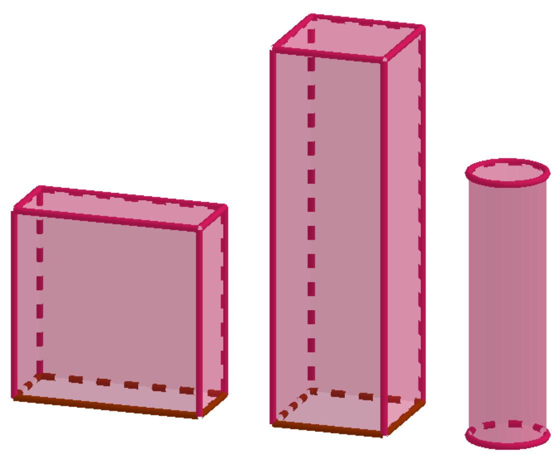


Figura 3.7. Ejemplos de cajas con base rectangular, cuadrada y circular.

8.1 Para una caja de $125 cm^3$ se tienen las siguientes especificaciones: el largo es el triple del ancho y la altura es el doble del ancho más $2 cm$. ¿Cuál de las siguientes expresiones modelan el área superficial del envase en función al ancho a?

- **A)** $6a^3 + 6a^2$
- **B)** $22a^2 + 16a$
- **C)** $11a^2 + 8a$
- **D)** $12a^3 + 12a^2$

8.2 Se planean fabricar cajas cilíndricas de $1000 cm^3$ con altura de $6\pi\, cm$. ¿Cuántos centímetros debe medir el diámetro de la base?

- **A)** $\frac{10\sqrt{15}}{3\pi}$
- **B)** $\frac{5\sqrt{15\pi}}{3\pi}$
- **C)** $\frac{10\sqrt{15\pi}}{3\pi}$
- **D)** $\frac{20\sqrt{15}}{3\pi}$

8.3 Se necesitan fabricar cajas con una capacidad de $250 cm^3$ con las siguientes características: ancho de $5 cm$ y una altura del doble de su largo. ¿Cuál debe ser la altura de la caja, en centímetros?

- **A)** 10
- **B)** 5
- **C)** $10\sqrt{5}$
- **D)** $5\sqrt{5}$

8.4 Debido a que las cajas son del mismo material se elaboran los modelos que empleen menos recursos para maximizar las ganancias. Para el modelo de $500 cm^3$ se tienen tres opciones de cajas con base cuadrada de $5,\ 8\ \text{y}\ 10 cm$. Si el costo de producción es de $0.01 por centímetro cuadrado, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- **A)** El costo de fabricación es el mismo.
- **B)** Es conveniente fabricar la caja con base de $5 cm$.
- **C)** Es conveniente fabricar la caja con base de $8 cm$.
- **D)** Es conveniente fabricar la caja con base de $10 cm$.

Situación 9. Materiales de construcción

Para poder prevenir el desabasto y pérdidas económicas, una constructora realiza un inventario del material que utiliza para una obra. A continuación, se presenta la cantidad de cemento, arena y varillas que se tenían disponibles para aproximadamente 4 semanas (Tabla 3.12). Considera que el consumo de los materiales sigue un comportamiento lineal.

Día del inventario	No. de sacos de cemento
1	2050
8	1700
15	1350
22	1000

Día del inventario	Kilogramos de arena
1	10500
6	9250
16	6750
26	4250

Día del inventario	No. de varillas
1	715
5	615
10	490
25	115

Tabla 3.12

9.1 ¿Cuántos sacos de cemento se utilizan al día? [Valor 1 punto]

A) 350
B) 44
C) 50
D) 263

9.2 ¿Cuál de las siguientes expresiones modela los kilogramos de arena que hay en existencia en el día x? [valor 2 puntos]

A) $10500-250(x-1)$
B) $10500-250x$
C) $250(x-1)+10500$
D) $250x-10500$

9.3 ¿Cuál es el número de varillas que disponía la obra en el día 20? [Valor 2 puntos]

A) 125
B) 365
C) 250
D) 240

9.4 De seguir el mismo comportamiento de consumo, ¿en cuántos días se agotará la arena? [Valor 3 puntos]

A) 31
B) 43
C) 35
D) 47

RESPUESTAS A LAS ACTIVIDADES DE REFORZAMIENTO

6.1 C)	**6.2 D)**	**6.3 B)**	**6.4 C)**
7.1 B)	**7.2 D)**	**7.3 A)**	**7.4 D)**
8.1 B)	**8.2 D)**	**8.3 A)**	**8.4 C)**
9.1 C)	**9.2 A)**	**9.3 D)**	**9.4 B)**

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carpenteyro, E. (2012). *Álgebra y aplicaciones*. Bachillerato. México: Editorial Patria.

Angel, A. R. y Runde, D. (2013). *Álgebra intermedia*. México: Pearson Educación.

De Oteyza, Lam, Hernández y Carrillo (2018). *Álgebra.* México: Pearson.

Swokowski. E. y Cole, J. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: CENGAGE Learning.

REFERENCIAS ELECTRÓNICAS

Barboza, G. (9 de julio de 2018). *Costo del transporte público en la CDMX 2018*. Recuperado el 27 de octubre de 2019 de: https://www.rastreator.mx/seguros-de-auto/articulos-destacados/tarifa-transporte-publico

Becerra, J. Página del Colegio de Matemáticas. Escuela Nacional Preparatoria No. 8. Recuperado el 15 de marzo de 2019 de: http://prepa8.unam.mx/academia/Colegios/Matematicas/paginacolmate/libros/e-books/m4-unidad03/mobile/index.html

Cuadros comparativos de la CONDUSEF. Ahorro Infantil. Recuperado el 25 marzo 2019 de: https://www.condusef.gob.mx/comparativos/comparativos.php?idc=1&im=banco

Redacción BBC Mundo. (12 de marzo, 2017) ¿Sabes cuál es la industria más contaminante después de la del petróleo? Recuperado el 25 de octubre de 2019 de: https://www.bbc.com/mundo/noticias-39194215

UNAM-SUMEM. Grupo de trabajo de Estándares. (2015). Estándares de matemáticas para el bachillerato de la UNAM. Disponible en http://www.sumem.unam.mx/publicaciones/estandares-de-matematicas

UNIDAD 4 SISTEMAS DE ECUACIONES PARA MODELAR CONDICIONES SIMULTÁNEAS.

Objetivo específico

El alumno:

Desarrollará habilidades de razonamiento lógico, abstracción, generalización y comunicación matemática al: identificar las relaciones numéricas involucradas en el fenómeno o evento estudiado, para expresarlas mediante un sistema de ecuaciones; representar fenómenos o eventos que requieran el uso de sistemas de dos y tres incógnitas; resolver sistemas de ecuaciones aplicando las propiedades de la igualdad y de los números reales; interpretar y validar sus resultados en el contexto de la situación o fenómeno analizado; fundamentar el procedimiento algebraico seleccionado.

Situación 1. Pantallas LED

En la actualidad podemos encontrar diferentes tipos de pantallas, cada una de estas se adaptan a un dispositivo específico y a las necesidades del usuario. Las pantallas LED están integradas por paneles LED RGB, los cuales forman pixeles que permiten desplegar imágenes y texto por pantalla. Son utilizadas en el mundo de la informática y de los dispositivos móviles y de TV.

Luis es gerente de una tienda de autoservicio, para hacer su reporte del inventario recibió del departamento de electrónica un documento que decía, se tienen 12 pantallas de 55 y 40 pulgadas cuyo consumo eléctrico es de 592 watts.

El consumo eléctrico es la cantidad de electricidad que se ocupa al estar encendidas todas las pantallas.

Como la información estaba incompleta, consultó un manual que indicaba que las pantallas LED de 55 pulgadas tienen un consumo eléctrico de 54 watts y para las pantallas de 40 pulgadas el consumo es de 46 watts.

1.1 Indica cuál de los siguientes sistemas expresan esta situación, si m representa la cantidad de pantallas de 55 pulgadas y n a las de 40 pulgadas.

A) $\begin{aligned} m + n &= 12 \\ 46m + 55n &= 592 \end{aligned}$

B) $\begin{aligned} m + n &= 12 \\ 55m + 40n &= 592 \end{aligned}$

C) $\begin{aligned} m + n &= 592 \\ 55m + 46n &= 12 \end{aligned}$

D) $\begin{aligned} m + n &= 12 \\ 54m + 46n &= 592 \end{aligned}$

Sistemas de ecuaciones.
Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas.
Resolver un sistema significa hallar todas las soluciones del sistema.

Solución:

Para poder resolver la pregunta primero debemos asignar variables para cada uno de los tamaños de pantallas.

La letra m representará a las pantallas de 55 pulgadas y la letra n a las pantallas de 40 pulgadas. Si utilizamos la información que le fue entregada a Luis, sabemos que en total la tienda tiene 12 pantallas entonces podemos expresarlo como: $m + n = 12$

Con la información del consumo de electricidad tendríamos: $54m + 46n = 592$

Respuesta correcta: D) $\begin{aligned} m + n &= 12 \\ 54m + 46n &= 592 \end{aligned}$

1.2 ¿Cuántas pantallas de 55 pulgadas tiene la tienda?

A) 8
B) 7
C) 5
D) 4

Método de sustitución.

- Despejar la incógnita de una de las ecuaciones y sustituir en la otra ecuación del sistema.
- Resolver la ecuación resultante para obtener el valor de la primera incógnita.
- Sustituir el valor hallado en la primera ecuación despejada para encontrar el valor de la segunda incógnita.

Solución:

Se forma así un sistema de ecuaciones de 2x2 (dos ecuaciones con dos incógnitas)

Para resolver este sistema se va a utilizar el método de sustitución, que consiste en despejar una de las incógnitas m y el resultado sustituirlo por la expresión $m = 12 - n$ en la otra ecuación.

$54m + 46n = 592$ al sustituir m tenemos

$54(12 - n) + 46n = 592$ al multiplicar término a término

$648 - 54n + 46n = 592$ si reducimos términos semejantes

$-8n + 648 = 592$ por propiedades de igualdad

$-8n = 592 - 648$ realizando las operaciones

$-8n = -56$ despejando

$n = \frac{-56}{-8}$ realizando la operación

$n = 7$

Al sustituir $n = 7$ en la expresión $m = 12 - n$ se obtiene $m = 5$

El problema queda resuelto, quiere decir que la tienda tiene 5 pantallas de 55 pulgadas y 7 pantallas de 40 pulgadas.

Respuesta correcta: C) 5 pantallas

1.3 ¿Cuántas pantallas de 40 pulgadas tiene la tienda?

A) 4
B) 5
C) 7
D) 8

Solución:

Como ya se resolvió el sistema podemos observar que la respuesta es $\mathrm{n} = 7$

Respuesta correcta: C) 7 pantallas

1.4 Se necesita conocer el peso de cada uno de los tamaños de pantalla, para poder colocarlos en los anaqueles adecuados en la bodega. Se sabe que la tienda tiene 12 pantallas en total y que se encuentran en exhibición una pantalla de cada tamaño. Si se pesan cuatro pantallas de 55 pulgadas y dos pantallas de 40 pulgadas pesan en total 111 kg. Si se pesan tres pantallas de 40 pulgadas y tres pantallas de 55 pulgadas pesan 97.5 kg. ¿Cuánto pesa una pantalla de 40 pulgadas?

A) 23.0 kg
B) 19.0 kg
C) 13.5 kg
D) 9.5 kg

Solución:

Sabiendo que m representa a las pantallas de 55 pulgadas y n representa a las pantallas de 40 pulgadas, podemos escribir el sistema de ecuaciones siguiente.

$$4m + 2n = 111$$
$$3m + 3n = 97.5$$

Utilizando alguno de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones se obtiene:

$$m = 23 \text{ y } n = 9.5$$

Respuesta correcta: D) 9.5 Kg

Situación 2. Albergue para perros

Para que la secretaría de protección animal otorgue un permiso para abrir un albergue para perros, es necesario que los animales estén vacunados y desparasitados. El fin de semana fueron a entregar algunos perros al albergue, que ahora cuenta con 35 los perros. Los perros que ya se encontraban en el albergue deben ser desparasitados y vacunados los que llegaron recientemente. El costo de las vacunas es de $\$120$ y el de las desparasitaciones es de $\$200$, los veterinarios decidieron hacerles a los dueños del albergue un descuento de 30% en las desparasitación.

2.1 Si en esta ocasión los dueños del albergue tuvieron que pagar $\$4800$. Determina cuántos perros llegaron al albergue, si p representa la cantidad de perros que se encontraban en el albergue y q representa la cantidad de perros que llegaron el fin de semana.

A) 5
B) 15
C) 20
D) 30

Método de suma y resta.

- Se debe elegir la incógnita a eliminar y multiplicar por el mismo coeficiente de la otra ecuación, pero con signo contrario.
- Se debe sumar verticalmente el sistema y resolver la ecuación resultante para hallar el valor de la primera incógnita.
- Finalmente se debe sustituir el valor hallado en una de las ecuaciones del sistema reducido y despejar la otra incógnita.

Solución:

Para resolver este problema vamos a utilizar el método de suma y resta.

El total de animales en el albergue lo expresamos como: $p+q=35$

Los veterinarios hicieron un descuento de 30% al precio de las desparasitaciones por lo que los duños del albergue sólo pagaron $\$140$ por cada una.

Entonces podemos expresar el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{gathered} p+q=35 \\ 140p+120q=4800 \end{gathered}$$

Debemos eliminar la variable p para encontrar lo que nos piden, por lo que vamos a multiplicar la primera ecuación por -140 que es el inverso aditivo de p.

$$-140p - 140q = -4900$$
$$140p + 120q = 4800$$

Sumamos ambas ecuaciones, esto hará que se elimine p y así obtendremos el valor deseado q; que representa la cantidad de perros que llegaron recientemente al albergue. $-20q = -100$

Al resolver la ecuación obtenemos: $q = 5$

Respuesta correcta: A) 5

2.2 ¿Cuánto tendra que pagar el dueño del albergue si los veterinarios no le hubieran hecho el descuento?

A) $\$4,600$
B) $\$6,600$
C) $\$1,020$
D) $\$13,600$

Solución:

Si no le hubiera hecho el descuento y conociendo que tenían 30 perros que había que desparasitar y 5 perros que había que vacunar se tendría:

$$30(200) + 5(120) = 6600$$

Respuesta correcta: B) $\$6,600$

2.3 ¿Cuánto debería pagar si ese descuento hubiera sido en las vacunas?

A) $\$3,120$
B) $\$6,420$
C) $\$6,180$
D) $\$2,080$

Solución:

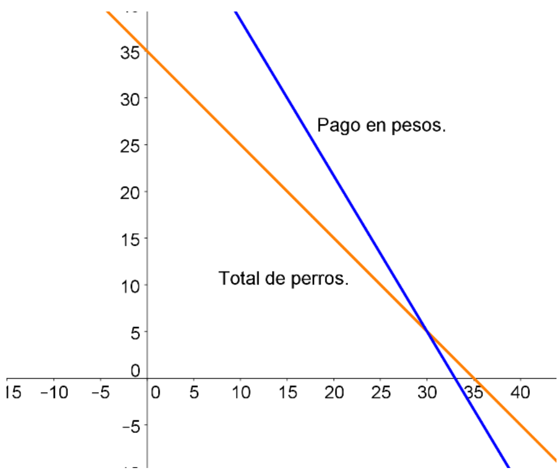
Si el descuento hubiera sido en las vacunas, entonces tenemos:
Como el descuento es de 30% entonces lo que se tiene que pagar es el 70% del precio original.
$120(.70)=84$; entonces son $\$140$ lo que se pagaría por cada vacuna después del descuento.

$$200(30)+5(84)=6450$$

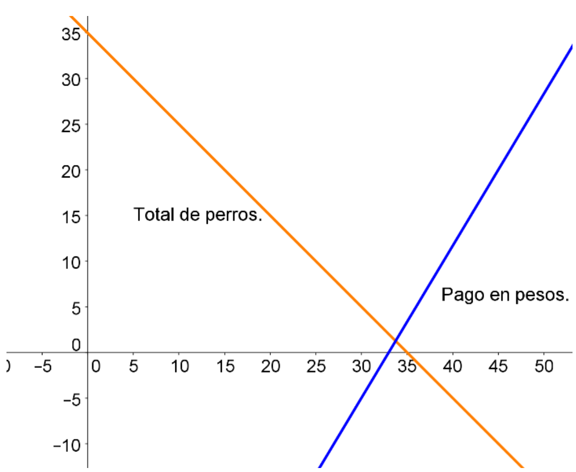
Respuesta correcta: B $\$6,420$

2.4 ¿Cuál de las siguientes gráficas representa al sistema original sin descuentos?

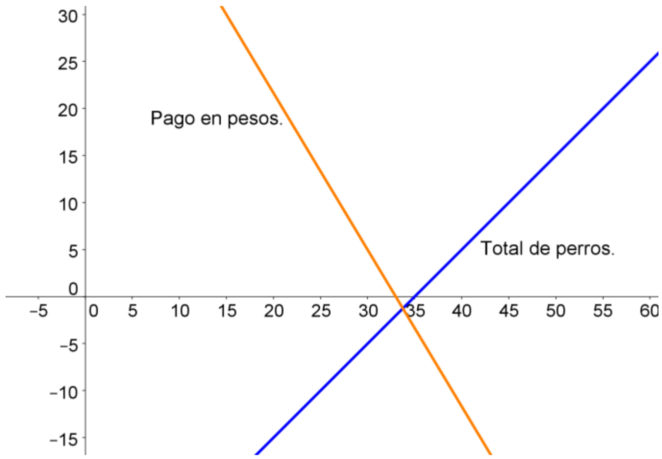
A)



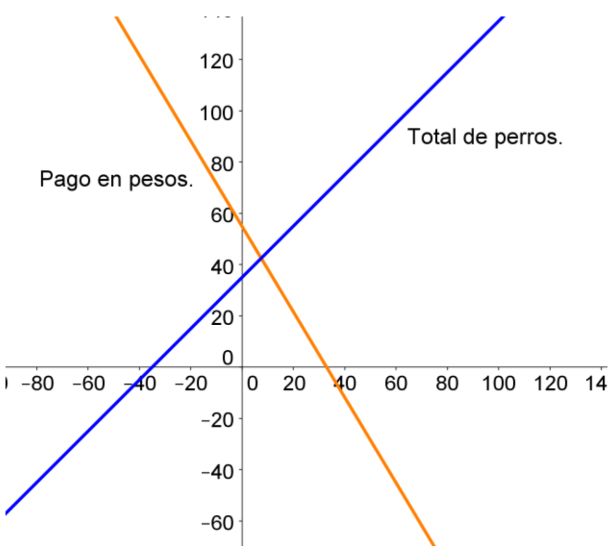
B)



C)



D)



Solución:

El sistema que representa esta situación es:
$$\begin{aligned} p + q &= 35 \\ 200p + 120q &= 6600 \end{aligned}$$

Si se da el valor de cero a cada una de las variables de las dos ecuaciones podemos hallar los puntos de intersección con los ejes.

Si $p=0$ lo sustituimos en la primera ecuación, obtenemos $0+q=35$; entonces $q=35$; de esta manera obtenemos el punto $(0,35)$., Si ahora hacemos $q=0$ y lo sustituimos en la primera ecuación se obtiene: $p+0=35$; de esta manera hallamos el otro punto de intersección $(35,0)$. Se procede de la misma forma para la segunda ecuación.

Respuesta correcta: A)

Situación 3. Huella hídrica

La huella hídrica es la cantidad de agua que usamos las personas para nuestras actividades diarias. Además del agua que podemos ver, como la que usamos para bañarnos, lavar platos, alimentos, etc. Hay una huella hídrica en cada producto que utilizamos, es decir, cierta cantidad de agua que se utilizó para su producción.

Contenido de Agua Virtual de productos comunes

Producto	Mililitros o Gramos	Agua Virtual (litros)
Playera de algodón	250 g	2,000
Hoja de papel A4	$80 g/m^2$	10
Microchip	2g	32
Par de zapatos	piel bovina	8,000
Taza de café	125 ml	140
Vaso de jugo de naranja	200 ml	170
Vaso de leche	200 ml	200
Huevo	40 g	135
Copa de vino	125 ml	120
Vaso de cerveza	250 ml	75
Jitomate	70 g	13
Hamburguesa	150 g	2,400

Fuente: Hoekstra, A. y Chapagain, 2006.

La cafetería *El trébol* tiene dos paquetes de desayunos que incluyen huevo al gusto, fruta y pan de dulce, la diferencia entre ambos es que el Paquete 1 ofrece una taza de café y el Paquete 2 un vaso de leche.

Esta mañana se sirvieron 20 desayunos, Marco que trabaja en el restaurante es ecologista y se puso a pensar en la huella hídrica que se tiene con las tazas y vasos servidos esa mañana en los desayunos. Utilizó la tabla anterior y dedujo que la huella hídrica fue de 3160 litros.

3.1 Determina cuántos Paquetes 1 se sirvieron esta mañana, si t representa las tazas de café y v representa los vasos de leche.

A) 5
B) 6
C) 14
D) 15

Método de igualación.

- Despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones.
- Igualar las ecuaciones obtenidas en el paso anterior y despejar la incógnita resultante.
- Sustituir el valor hallado en alguna de las ecuaciones anteriores y obtener el valor de la otra incógnita.

Solución:

Expresemos las ecuaciones por medio de incógnitas, utilicemos t para representar a las tazas de café y v para representar a los vasos.
Entonces obtenemos las ecuaciones: $t+v=20$ y $140t+200v=3160$

Despejando la variable t en ambas ecuaciones obtenemos: $t=20-v$ y $t=\frac{3160-200v}{140}$ y se igualan

Al igualar las ecuaciones resultantes: $20-v=\frac{3160-200v}{140}$.

Utilizando las propiedades de la igualdad tenemos: $140(20-v)=3160-200v$

Realizando las operaciones: $2800-140v=3160-200v$

$$-140v+200v=3160-2800$$

$$60v=360$$

$$v=\frac{360}{60}$$

$$v=6$$

Este valor lo sustituimos en alguna de las ecuaciones iniciales, $t+6=20$,
Con lo que obtenemos: $t=14$.

Respuesta correcta: C) 14

3.2 Determina cuántos Paquetes 2 se sirvieron esta mañana, si t representa las tazas de café y v representa los vasos de leche.

A) 15
B) 14
C) 6
D) 5

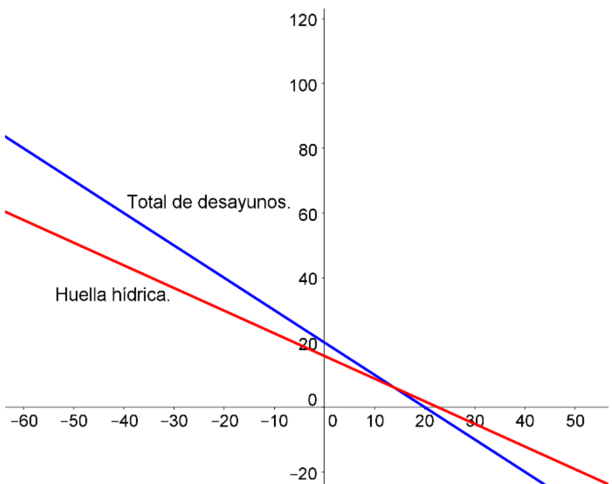
Solución:

Al resolver el sistema se obtuvieron los valores de los dos paquetes que tiene esa cafetería para el desayuno, por lo que: $v = 6$

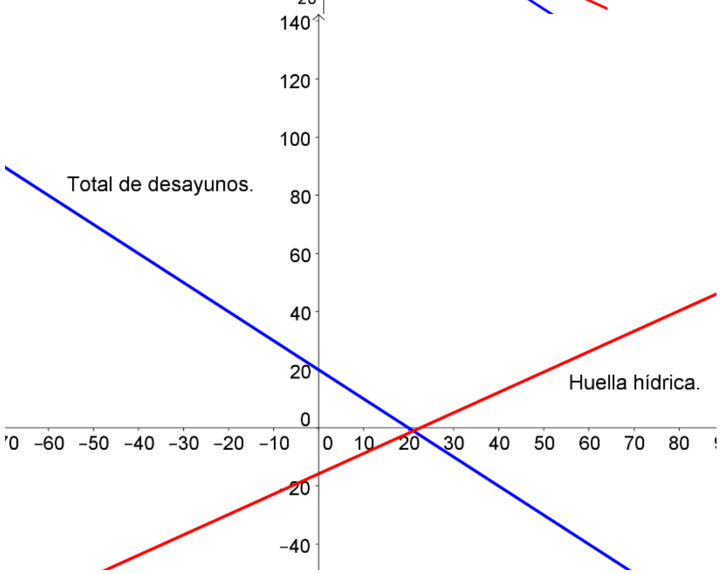
Respuesta correcta: C) 6

3.3 Determine la gráfica que represente el sistema que modela esta situación.

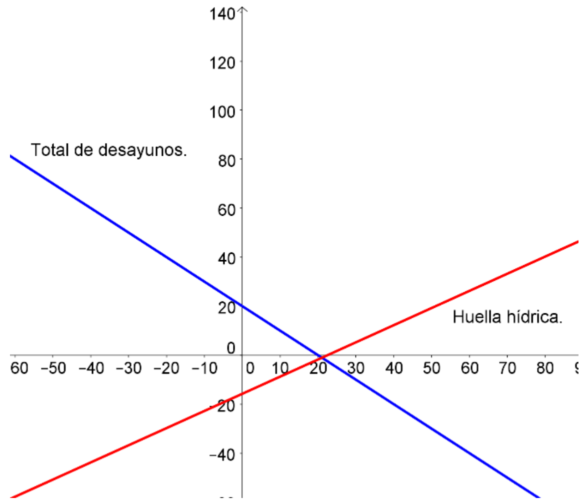
A)



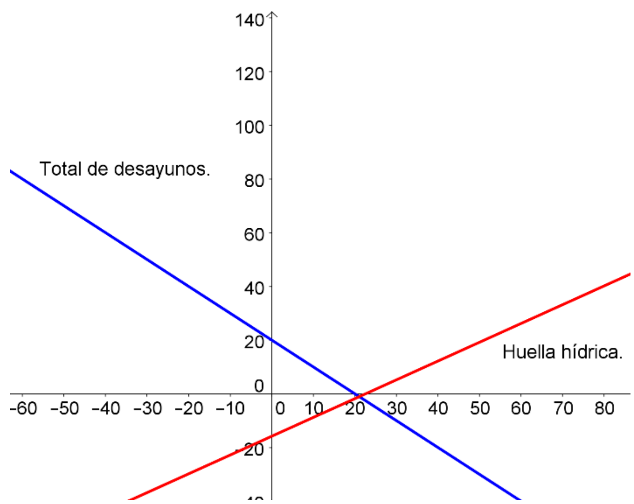
B)



C)



D)



Solución:

Respuesta correcta: A)

3.4 La cafetería El Trébol acaba de crear dos nuevos paquetes, el paquete 3 incluye un vaso de jugo de naranja y el paquete 4 incluye un huevo adicional. Esta mañana se sirvieron 14 desayunos de los paquetes nuevos, con una huella hídrica de 2170 litros de agua virtual. Determina el sistema de ecuaciones que expresa esta situación, donde x representa la cantidad de vasos de jugo de naranja y la cantidad de huevos adicional.

A) $\begin{array}{l} x-14=y \\ 170x+135y=2170 \end{array}$

B) $\begin{array}{l} x+y=14 \\ 170x-135y=2170 \end{array}$

C) $\begin{array}{l} x+y=14 \\ 170x+135y=2170 \end{array}$

D) $\begin{array}{l} y-14=x \\ 170x+135y=2170 \end{array}$

Solución:

Se sabe que se sirvieron 14 desayunos, y de acuerdo con la tabla de la huella hídrica se puede conocer que un vaso de jugo de naranja tiene una huella hídrica de 170 litros y cada huevo tiene 135 litros de huella hídrica Si x representa la cantidad de vasos de jugo de naranja y la cantidad de huevos adicionales se representa con y.. Con esta información se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{l} x+y=14 \\ 170x+135y=2170 \end{array}$$

Respuesta correcta: C) $\begin{array}{l} x+y=14 \\ 170x+135y=2170 \end{array}$

Situación 4. Fábrica de pan dulce

Grupo Bimbo es una de las empresas de panificación más grandes del mundo por su volumen de producción y ocupa el primer lugar a escala internacional por posicionamiento de la marca.

Elabora, distribuye y comercializa alrededor de 3600 productos, con cerca de 100 marcas en distintas categorías: pan blanco y pan dulce, bollería, pastelería de tipo casero, galletas, dulces, chocolates, botanas, tortillas empacadas de maíz y de harina de trigo, tostadas, cajeta, comida procesada y maquinaria.

Tiene plantas industriales en Monterrey, Puebla y Guadalajara. En la planta de Monterrey tiene 2 administradores, 6 supervisores y 80 trabajadores con una nómina mensual es de $\$688,000$. En la planta de Puebla tiene 4 supervisores, 65 trabajadores y un administrador con una nómina de $\$532,000$ y en la planta de Guadalajara tiene 54 trabajadores, un administrador y 3 supervisores con una nómina de $\$442,000$

4.1 Si a representa el sueldo de los administradores, s representa el sueldo de los supervisores y t el sueldo de los trabajadores. ¿Cuál es el sueldo de un supervisor?

- **A)** $\$7000.00$
- **B)** $\$9000.00$
- **C)** $\$13000.00$
- **D)** $\$25000.00$

Solución:

Con esta información se puede formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$2a + 6s + 80t = 688$ (1)

$a + 4s + 65t = 532$ (2) (las cifras de nómina están dadas en miles de pesos).

$a + 3s + 54t = 442$ (3)

Para poder resolver este sistema de ecuaciones se debe eliminar la misma variable en las ecuaciones para ir reducirlo.

Si multiplicamos la ecuación (2) por -1 obtenemos: $-a - 4s - 65t = -532$ y si lo sumamos a la ecuación (3) tendremos: $-s - 11t = -90$

Si multiplicamos por (-2) la ecuación (2) obtenemos: $-2a - 8s - 130t = -1064$ y si esta última ecuación la sumamos a la ecuación (1) tenemos: $-2s - 50t = -376$

Con lo que se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se puede resolver por cualquiera de los métodos ya estudiados, con lo que obtenemos el sueldo del supervisor que es $\$13000.00$

Respuesta correcta: C) $\$13000.00$

4.2 ¿Cuál será la nómina de la planta de Monterrey si 10 trabajadores renunciaron?

- **A)** $\$618,000.00$
- **B)** $\$598,000.00$
- **C)** $\$558,000.00$
- **D)** $\$402,000.00$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene el sueldo de los trabajadores que es de $\$7000.00$. Si son 10 trabajadores los que renunciaron entonces $(10)(7000)=70000$

La nómina de la planta de Monterrey es de $\$618,000.00$ entonces:

$$688000-70000=618000$$

Respuesta correcta: A) $\$618,000.00$

4.3 Determina el sueldo de un administrador, si recibió un aumento del 3.4%

- **A)** $\$13,044.20$
- **B)** $\$13,442.00$
- **C)** $\$25,085.00$
- **D)** $\$25,850.00$

Solución:

Al resolver el sistema se obtiene que el sueldo de un administrador es de $\$25,000.00$
Si el administrador recibe un aumento de 3.4% entonces:
El 100% de su sueldo más 3.4% corresponde al 1.034

$$(25000)(1.034)=25850$$

Respuesta correcta: D) $\$25,850.00$

4.4 El SAT le retiene el 6.4% de su sueldo a los supervisores, ¿Qué cantidad de dinero recibirá un supervisor después de la retención?

- **A)** $\$24,150.00$
- **B)** $\$12,168.00$
- **C)** $\$16,000.00$
- **D)** $\$23,400.00$

Solución:

Al resolver el sistema se obtuvo que el sueldo de un supervisor es de $\$13,000.00$, si el SAT hace una retención de 6.4% esto significa que le descuenta esa cantidad, por lo tanto tenemos que a la cantidad total que se representa como el 100% le restamos el 3.4%, es decir, $100-6.4=93.6$ entonces:

$$(13000)\left(\frac{93.6}{100}\right)=12168$$

Respuesta correcta: B) $\$12,168.00$

Situación 5. Fabricación de lápices

El proceso de fabricación de un lápiz inicia con un bloque de madera, habitualmente de cedro, se divide en tablillas a las que se les hacen unas hendiduras para colocar las minas. A continuación, se aplica pegamento en los surcos de las tablillas, se colocan las minas de grafito en una de ellas y se coloca la otra encima.

Una fábrica de lápices cuenta con tres máquinas, si las tres máquinas trabajan juntas pueden producir 6700 lápices, si sólo trabajan las maquinas A y B se pueden producir 5200 lápices pero, si sólo trabajan las máquinas B y C se pueden producir 3700 lápices.

5.1 Si x representa la producción de la máquina A, y representa la producción de la máquina B y z la producción de la máquina C. Indica cuál de los siguientes sistemas representa esta situación.

A)
$$\begin{aligned} &x+y+z=6700\\ &x+y=5200\\ &y+z=3700 \end{aligned}$$

B)
$$\begin{aligned} &x+y+z=6700\\ &x-5200=y\\ &y+z=3700 \end{aligned}$$

C)
$$\begin{aligned} &x+y-z=6700\\ &x-5200=y\\ &y+z=3700 \end{aligned}$$

D)
$$\begin{aligned} &x-y+z=6700\\ &x+y=5200\\ &x+z=3700 \end{aligned}$$

Solución:
Con la información proporcionada en el problema obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$x+y+z=6700$ (1) las tres máquinas producen 6700 lápices

$x+y=5200$ (2) sólo A y B producen 5200 lápices

$y+z=3700$ (3) sólo B y C producen 3700 lápices

Respuesta correcta: A)
$$\begin{array}{l} x+y+z=6700 \\ x+y=5200 \\ y+z=3700 \end{array}$$

5.2 ¿Cuál es la producción de la máquina B?

A) 1000
B) 1500
C) 2200
D) 3000

Solución:

Si sustituimos la ecuación (2) en la ecuación (1) obtenemos $5200+z=6700$ y aplicando las propiedades de la igualdad se tiene: $z=1500$, este valor se sustituye en (3) con lo que obtenemos el valor de $y=2200$

Respuesta correcta: C) 2200

5.3 ¿Cuál es la producción de la máquina C?

A) 1000
B) 1500
C) 2200
D) 3000

Solución:
Al resolver el sistema de ecuaciones y sabiendo que z representa la producción de la máquina C, entonces la producción de C es de 1500 lápices.

Respuesta correcta: B) 1500

5.4 ¿Cuál es la producción de las máquinas A y C?

A) 4500 lápices.
B) 3000 lápices.
C) 1500 lápices.
D) 2200 lápices.

Solución:

Al resolver el sistema se obtiene que la máquina A produce 3000 lápices y ya conocíamos que la máquina C produce 1500 lápices, por lo tanto al sumar las producciones tenemos 4500 .lápices.

Respuesta correcta: A) 4500

ACTIVIDADES DE REFORZAMIENTO.

Situación 6. Paseo en bicicleta

En algunas calles de la Ciudad de México todos los domingos se realiza un paseo ciclista. Los participantes pueden llevar su bicicleta o alquilar alguna en puntos determinados.

6.1 Una compañía de renta de bicicletas ofrece el siguiente plan: una inscripción anual de $\$300$ más $\$40$ por cada hora que se utilice. Determina cuál de las siguientes expresiones representa esta situación, donde y es la cantidad total a pagar y x el número de horas que se renta la bicicleta:

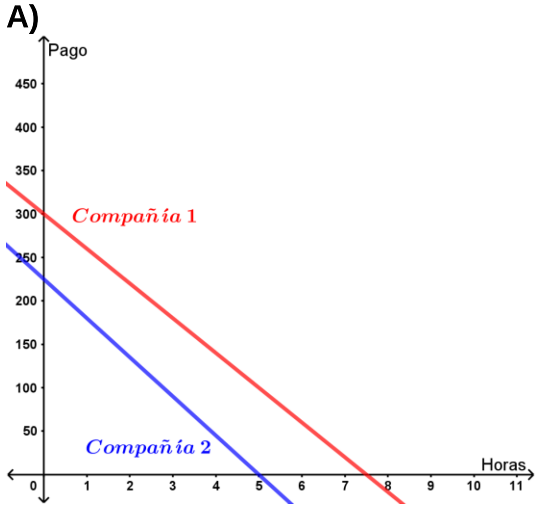
A) $x = 340 + y$
B) $y = 40x + 300x$
C) $y = 40x + 300$
D) $x = 300y + 40$

6.2 Una segunda compañía de renta de bicicletas ofrece otro plan: una inscripción anual de $\$225$ más $\$45$ por cada hora que se utilice. ¿Cuál es el número mínimo de horas que se tendría que rentar una bicicleta para que el primer plan sea más conveniente?

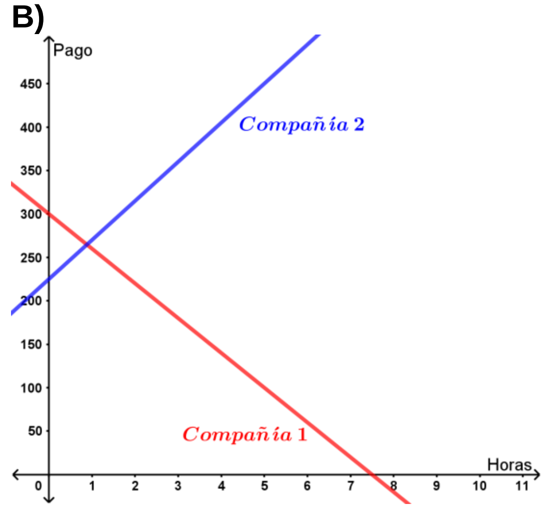
A) 10
B) 15
C) 20
D) 25

6.3 ¿Cuál de las siguientes gráficas, representa los planes de renta de bicicletas?

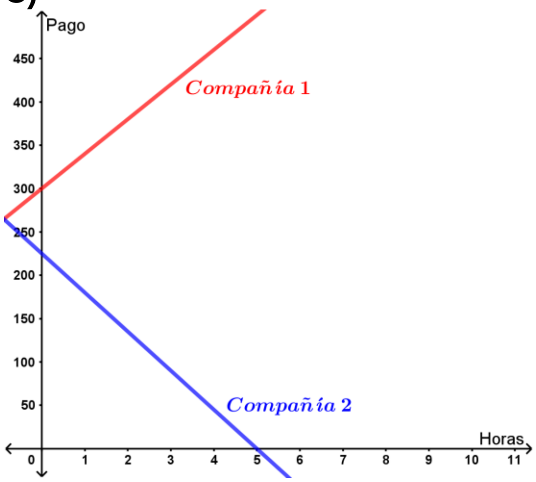
A)



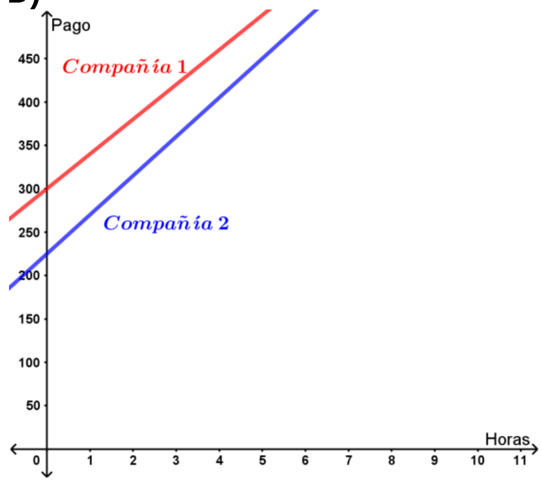
B)



C)



D)



6.4 Si decides rentar una bicicleta por primera vez durante 3 horas, ¿Cuál sería la diferencia en el precio entre los planes de la primera y la segunda compañía?

A) 15

B) 45

C) 60

D) 75

Situación 7. Alfarería

La alfarería mexicana es reconocida como una de las más hermosa y mejor trabajada a nivel mundial.

7.1 Ángel tiene un taller de alfarería, que se caracteriza por la elaboración de jarrones.

El día de ayer le hicieron un pedido de jarrones que debe entregar en un plazo determinado. Él calculó que si se elaboran 125 jarrones diarios le faltarían 75 jarrones para entregar el pedido a tiempo. Pero si elaboran 130 jarrones por día sobrarían 40 jarrones.

¿Cuál es el sistema de ecuaciones que representa a esta situación?

A) $\begin{array}{l} 125x + y = -75 \\ 130x - y = 40 \end{array}$

B) $\begin{array}{l} 125x - y = -75 \\ 130x - y = 40 \end{array}$

C) $\begin{array}{l} 125x - y = 75 \\ 130x - y = 40 \end{array}$

D) $\begin{array}{l} 125x + y = -75 \\ 130x + y = 40 \end{array}$

7.2 ¿De cuántos jarrones constaba el pedido?

A) 2800
B) 950
C) 800
D) 2950

7.3 Si cobra $\$350$ por cada jarrón ¿cuánto cobró por el pedido?

A) $\$980,000$
B) $\$1,032,500$
C) $\$332,500$
D) $\$280,000$

7.4 En el taller tienen a la venta jarrones lisos y decorados, este día se vendieron 12 jarrones y se recaudaron $\$4800$. Si los jarrones lisos tienen un precio de $\$350$ y los jarrones decorados tienen un precio de $\$500$. ¿Cuál de los siguientes sistemas representa esta situación?

A) $\begin{array}{l} x+y=12 \\ 350x+500y=4800 \end{array}$

B) $\begin{array}{l} x+y=12 \\ 350x-500y=4800 \end{array}$

C) $\begin{array}{l} x-12=y \\ 350x+500y=4800 \end{array}$

D) $\begin{array}{l} y-12=x \\ 350x+500y=4800 \end{array}$

Situación 8. Aves en México.

Para establecer la importancia de la conservación de una región, se tiene que considerar el grado de endemismo y el grado de amenaza de cada una de sus especies. En México existen 232 especies de aves, entre endémicas (x) y semiendémicas (y), según información del museo de historia natural. Las aves endémicas son aquellas que no rebasan los límites territoriales de México; y las aves semiendémicas son las especies que tienen una distribución temporal restringida en alguna parte de México.

8.1 Determina cuál de las siguientes expresiones representa esta situación, donde x es la cantidad de aves endémicas y las aves semiendémicas se representan con y.

A) $\begin{array}{l} x+y=232 \\ x-y=-74 \end{array}$

B) $\begin{array}{l} x+y=232 \\ x+y=-74 \end{array}$

C) $\begin{array}{l} x-y=232 \\ x-y=74 \end{array}$

D) $\begin{array}{l} x-y=232 \\ x-74=-y \end{array}$

8.2 Si un reporte elaborado por un Biólogo indica que las aves endémicas exceden a las semiendémicas en 74 aves. ¿Cuántas aves son endémicas en México?

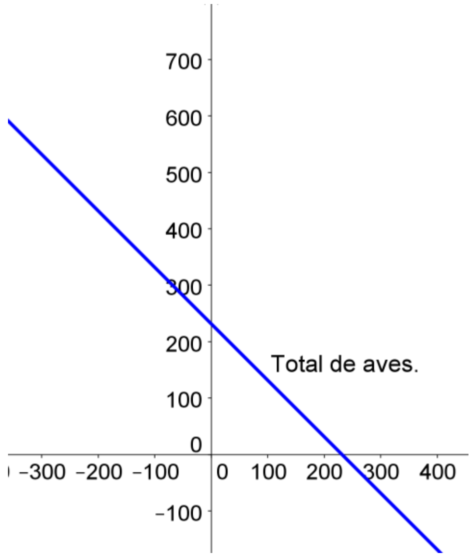
A) 158
B) 153
C) 79
D) 74

8.3 En la primavera nacieron 30 aves semiendémicas en Mexico. ¿Cuántas aves semiendémicas hay ahora en el país?

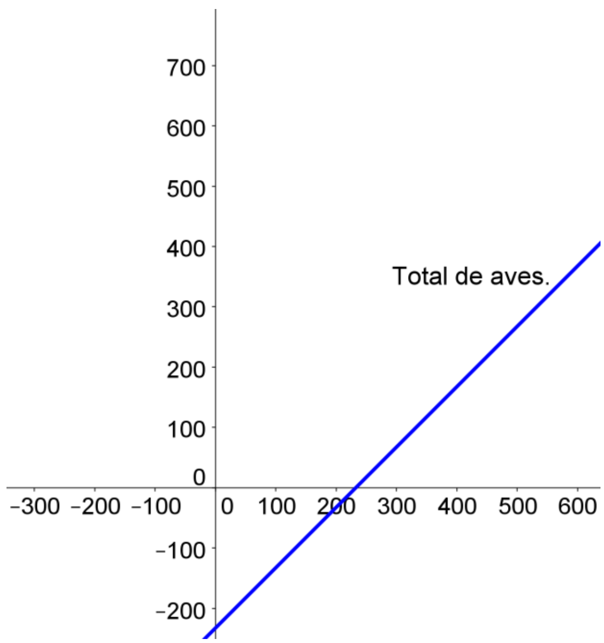
A) 104
B) 183
C) 79
D) 109

8.4 ¿Cuál de las siguientes gráficas representa al total de aves endémicas y semiendémicas?

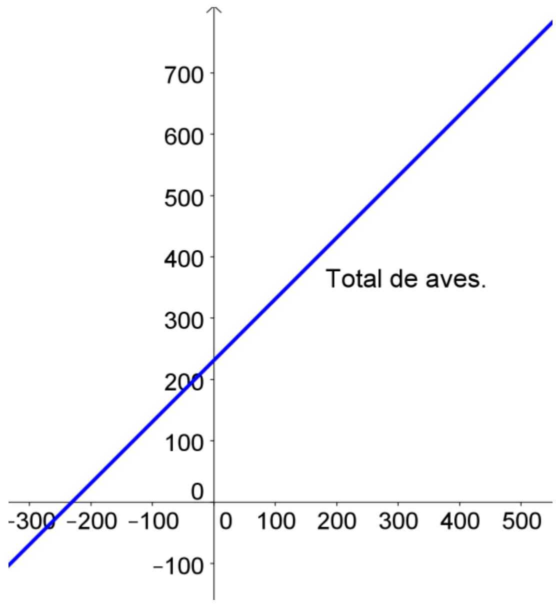
A)


700
600
500
400
300
200
100
0
−100
−300 −200 −100 0 100 200 300 400
Total de aves.

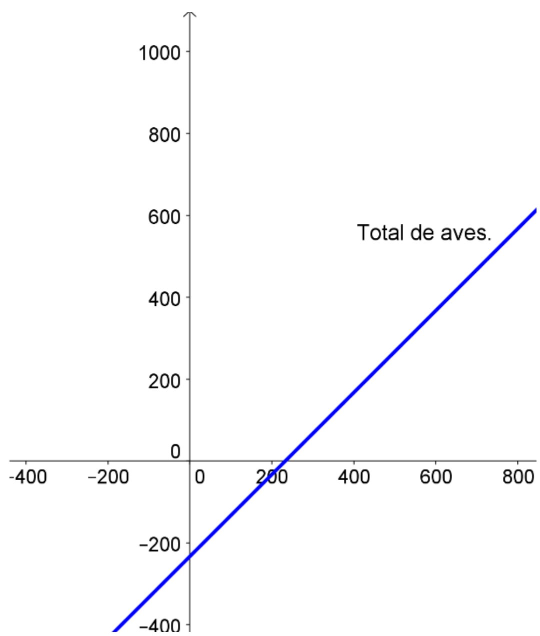
B)


700
600
500
400
300
200
100
0
−100
−200
−300 −200 −100 0 100 200 300 400 500 600
Total de aves.

C)


700
600
500
400
300
200
100
0
-300 −200 −100 0 100 200 300 400 500
−100
Total de aves.

D)


1000
800
600
400
200
0
-400 −200 0 200 400 600 800
−200
−400
Total de aves.

Situación 9. Oficinas virtuales.

Una nueva modalidad de oficinas, son las oficinas virtuales (wework) que consiste en alquilar una oficina amueblada y personalizada a las necesidades de los negocios en expansión.

Un edificio cuenta con 60 oficinas virtuales, algunas son para que trabajen 4 personas y otras son para 6 personas. La capacidad total de edificio es para 290 personas.

9.1 Determina el sistema que representa la situación, si x representa las oficinas para cuatro personas y las oficinas para seis personas están representados con y.

A) $$\begin{aligned} 4x+6y&=60 \\ 6x+4y&=290 \end{aligned}$$

B) $$\begin{aligned} x+y&=60 \\ 6x+4y&=290 \end{aligned}$$

C) $$\begin{aligned} x+y&=60 \\ x+y&=290 \end{aligned}$$

D) $$\begin{aligned} x+y&=60 \\ 4x+6y&=290 \end{aligned}$$

9.2 ¿Cuántas oficinas para 6 personas tiene el edificio?

A) 20
B) 35
C) 25
D) 40

9.3 ¿Cuántas oficinas para 4 personas tiene el edificio?

A) 35
B) 25
C) 40
D) 20

9.4 Si sólo están ocupadas el 20% de las oficinas para 4 personas y el 40% de oficinas para 6 personas, ¿cuántas personas trabajan en ese edificio?

A) 82
B) 88
C) 86
D) 104

Situación 10. Estudio de mercado

Una empresa quiere sacar a la venta un nuevo producto, por lo que realiza un estudio de mercado que consiste en hacer encuestas por medio de llamadas telefónicas o encuestas en la calle.

La empresa contrata a 40 personas, ofrece pagar $\$50$ la hora a las personas que harán las encuestas por medio de llamadas telefónicas y $\$65$ la hora a las personas que harán las entrevistas en la calle. El contratista pagó $\$2270$ en total.

10.1 Determine el sistema que represente la situación indicada, donde representa x a las personas que hacen encuestas vía telefónica y las que hacen encuestas en la calle se representan con y.

$$\begin{array}{l} x+y=40 \\ 50x+65y=2270 \end{array}$$

B) $$\begin{array}{l} x+y=40 \\ 65x+50y=2270 \end{array}$$

C) $$\begin{array}{l} 50x+65y=40 \\ x+y=2270 \end{array}$$

D) $$\begin{array}{l} 65x+50y=40 \\ x+y=2270 \end{array}$$

10.2 ¿Cuántas personas fueron contratadas para hacer llamadas telefónicas?

A) 10
B) 18
C) 30
D) 22

10.3 ¿A cuántas personas contrataron para hacer encuestas en la calle?

A) 24
B) 18
C) 22
D) 16

10.4 Si la empresa requiere contratar a 8 personas más para la encuesta por teléfono y 12 para la encuesta en la calle, ¿cuánto tendrá, que pagar si considera darles un bono de $\$100$ a todos sus empleados?

A) $\$5450$
B) $\$4250$
C) $\$9450$
D) $\$4650$

Situación 11. Joyería de Plata

Taxco es una ciudad del estado de Guerrero, al suroeste de la Ciudad de México. Es famoso por la producción de joyas de plata y su arquitectura colonial española. La plata Sterling conocida también como 0.925 es una aleación de plata pura y cobre. El precio de un gramo plata pura es de $\$10.43$ y el precio de un gramo de cobre es de $\$2$. La elaboración de un anillo de $17g$ tiene un costo de fabricación de $\$166.57$

11.1 Si x representa la cantidad de plata pura en gramos y y representa la cantidad en gramos de cobre, el sistema de ecuaciones que represente esta situación es:

A)
$$\begin{aligned} x+y&=17 \\ 10.43x+2y&=166.57 \end{aligned}$$

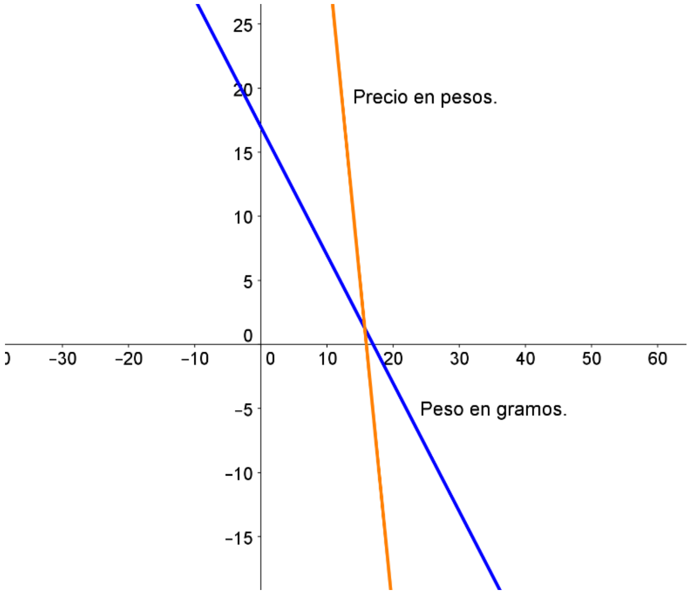
B)
$$\begin{aligned} x+y&=17 \\ 2x+10.43y&=166.57 \end{aligned}$$

C)
$$\begin{aligned} x-17&=y \\ 10.43x+2y&=166.57 \end{aligned}$$

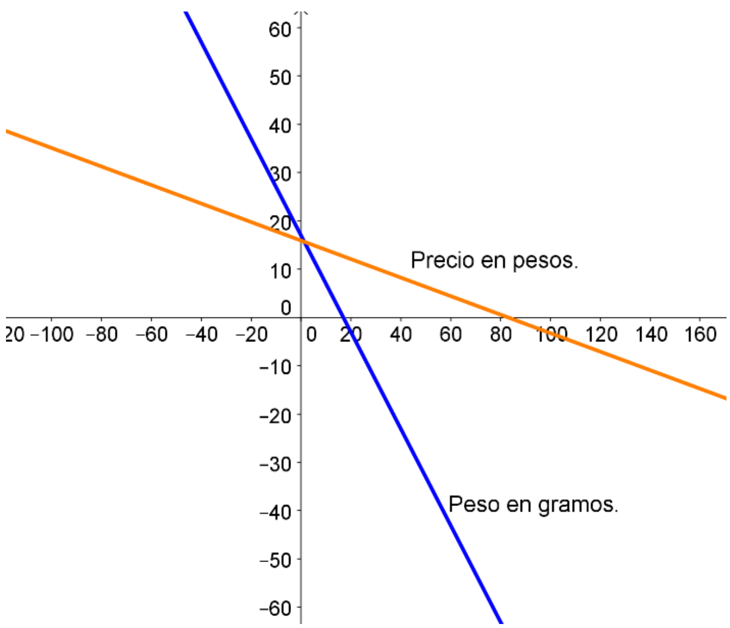
D)
$$\begin{aligned} y&=17-x \\ 2x+10.43y&=166.57 \end{aligned}$$

11.2 ¿Cuál de las siguientes gráficas representa esta situación?

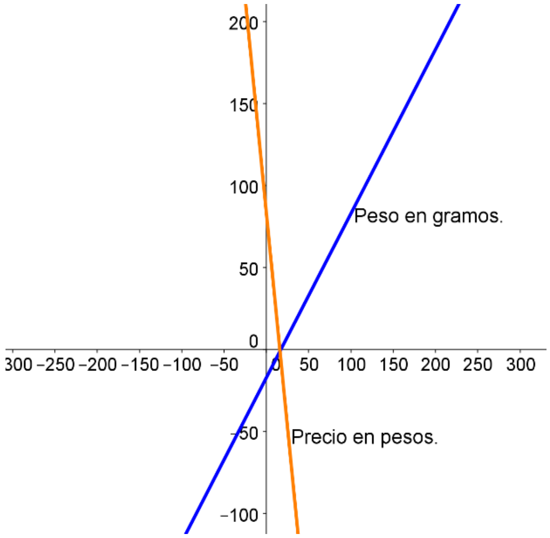
A)



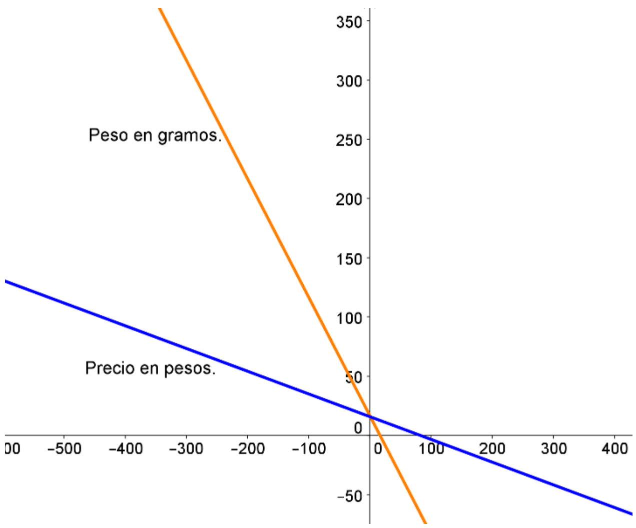
B)



C)



D)



11.3 ¿Cuántos gramos de plata pura se necesita para un anillo de $17\,\text{g}$?

A) 0.94
B) 1.27
C) 15.91
D) 15.72

11.4 ¿Cuántos gramos de cobre se requieren para fabricar el anillo?

A) 15.91
B) 15.72
C) 1.27
D) 0.94

RESPUESTA A LAS ACTIVIDADES DE REFORZAMIENTO.

1.1 C)	**1.2 B)**	**1.3 D)**	**1.4 C)**
2.1 B)	**2.2 D)**	**2.3 B)**	**2.4 A)**
3.1 A)	**3.2 C)**	**3.3 B)**	**3.4 A)**
4.1 D)	**4.2 C)**	**4.3 A)**	**4.4 B)**
5.1 A)	**5.2 D)**	**5.3 B)**	**5.4 C)**
6.1 A)	**6.2 A)**	**6.3 D)**	**6.4 C)**

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Centeno, M. .. (2004). *Matemáticas I.* México: Limusa.

REFERENCIAS ELETRÓNICAS.

(s.f.). Obtenido de https://grupobimbo.com/es

(s.f.). Obtenido de https://www.monogrfias.com

José, C. (31 de Enero de 2017). *Alfarería mexicana*. Obtenido de xicolindoyquerido.com.mx

tu huella hídrica. (15 de octubre de 2010). Obtenido de recuperandoelplaneta.blogspot.com/2010

wikipedia. (s.f.). *enciclopedia de contenido libre,*. Obtenido de es.m.wikipedia.org

UNIDAD 5. INECUACIONES PARA MODELAR RESTRICCIONES

Objetivo específico

El alumno:

Desarrollará habilidades de razonamiento lógico, abstracción, generalización y comunicación matemática al: identificar las relaciones numéricas involucradas en un evento o fenómeno de restricción, y modelarlo mediante el uso de inecuaciones o sistemas de inecuaciones; resolver inecuaciones aplicando las propiedades de la desigualdad y de los números reales; representar gráficamente la(s) inecuación(es) y su conjunto solución; interpretar y validar sus resultados en el contexto de la situación o fenómeno analizado; fundamentar el procedimiento seleccionado.

Situación 1. La ingesta de calorías

El aumento de peso se relaciona de forma directa con la diferencia entre las calorías que se consumen y el gasto que se hace de ellas durante el día. La ingesta de calorías para cada organismo varía de acuerdo con la edad, el índice de masa muscular, altura, sexo, edad, las actividades diarias que se realizan, etc.

A continuación, se expone un cuadro de calorías diarias requeridas según la edad, sexo y nivel de actividad.

Nota: x representa la ingesta de calorías.

Edad (años)	*Sexo*	*Sedentario*	*Actividad Moderada*	*Activo*
2-3	*Hombre o Mujer*	*1000*	*1000*	*1000*
4-8	*Hombre* *Mujer*	$1200 \le x < 1400$ $1200 \le x < 1400$	$1400 \le x < 1600$ $1400 \le x < 1600$	$1600 \le x \le 2000$ $1600 \le x \le 1800$
9-13	*Hombre* *Mujer*	$1600 \le x < 2000$ $1400 \le x < 1600$	$1800 \le x < 2200$ $1600 \le x < 2000$	$2000 \le x \le 2600$ $1800 \le x \le 2200$
14-18	*Hombre* *Mujer*	$2000 \le x < 2400$ $1600 \le x < 2000$	$2400 \le x < 2800$ $1800 \le x < 2200$	$2800 \le x < 3200$ $2200 \le x < 2600$
19-30	*Hombre* *Mujer*	$2400 \le x < 2600$ $1800 \le x < 2000$	$2600 \le x < 2800$ $2000 \le x < 2200$	$2800 \le x \le 3200$ $2200 \le x \le 2600$
31-50	*Hombre* *Mujer*	$2200 \le x < 2400$ $1600 \le x < 1800$	$2400 \le x < 2600$ $1800 \le x < 2000$	$2800 \le x \le 3000$ $2000 \le x \le 2400$
Mayores de 50	*Hombre* *Mujer*	$2000 \le x < 2200$ $1400 \le x < 1600$	$2200 \le x < 2400$ $1600 \le x < 1800$	$2600 \le x \le 2800$ $1800 \le x \le 2200$

Adaptada de las pautas alimentarias para los estadounidenses 2010, edición No. 7 del Departamento de Agricultura de los E.E.U.U. y el Departamento de Salud y Servicios Públicos de loe Estados Unidos- Washington DC, Oficina de Imprenta de E.E.U.U., 2010.

1.1 Según el cuadro de calorías diarias, una mujer con una actividad moderada de 19 a 30 años debe de ingerir:

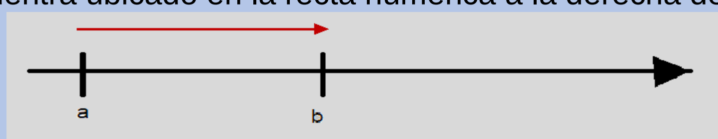
A) 1800 o más calorías, pero menos de 2000 diariamente.
B) 2000 o más calorías, pero menos de 2200 diariamente.
C) 2200 calorías o más, sin sobrepasar las 2600 diariamente.
D) Más de 2000 calorías, sin sobrepasar las 2200 diariamente.

Concepto de desigualdad

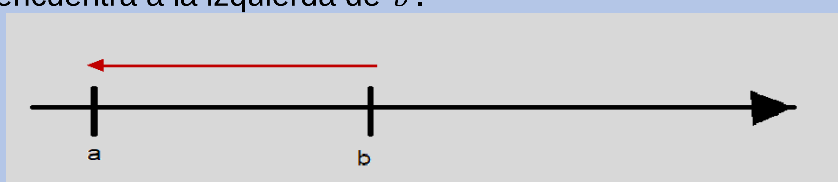
Una desigualdad es una relación de orden que se da entre dos valores distintos, en caso de ser iguales se denomina igualdad.
Si los valores en cuestión pertenecen a un conjunto ordenado, como es el caso del conjunto numérico de los reales, existen otras propiedades básicas.
En los números reales existe la propiedad llamada tricotomía la cual establece que para un par de números reales a y b se cumple una y sólo una de las siguientes proposiciones:

- Si a es mayor que b; se denota $a > b$
- Si a es menor que b; se denota $a < b$
- Si a es igual que b; se denota $a = b$

Se dice que a es mayor que b, si la diferencia de $a - b$ es un número positivo, o si a se encuentra ubicado en la recta numérica a la derecha de b.



Por el contrario a es menor que b, si la diferencia $a - b$ es un número negativo, o si a se encuentra a la izquierda de b.



Por último, a es igual a b, si $a - b = 0$
Con frecuencia en la resolución de problemas es conveniente combinar una desigualdad con una igualdad utilizando los siguientes símbolos: $\leq$ ó $\geq$
Las relaciones que expresan el uso de estos símbolos son las siguientes:
$a \geq b$ significa que a es mayor o igual que b.
$a \leq b$ significa que a es menor o igual que b.

Solución:

Se pueda observar que una mujer de 19 a 30 años con una actividad moderada presenta la siguiente desigualdad: $2000 \leq x < 2200$

Dado que $2000 \leq x$, que se lee 2000 es menor o igual que x, permite que consuma 2000 o más calorías; pero la restricción $x < 2200$, que se lee x es menor estricto de 2200, índica que debe ingerir menos de 2200 calorías, es decir, puede consumir de “2000 o más calorías, pero menos de 2200 diariamente”.

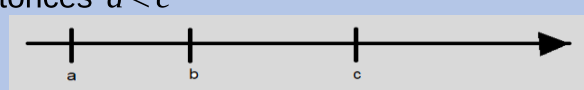
Respuesta Correcta: B) 2000 o más calorías, pero menos de 2200 diariamente.

1.2 Un buen día Juan que tiene 16 años, decide incorporarse a un equipo de futbol, por lo que de ser una persona con una actividad moderada ahora se convierte en una persona activa. Gracias a este cambio ¿cuántas calorías más debe aumentar para cumplir su requerimiento diario de calorías?

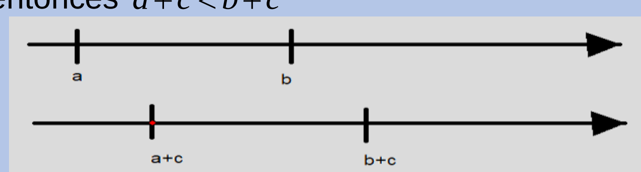
A) 100
B) 200
C) 300
D) 400

Propiedades de las desigualdades

Otras propiedades importantes en las desigualdades son las siguientes.
Si tienes números reales a, b y c
Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$



Si $a < b$ entonces se puede sumar cualquier número real c a ambos miembros de la desigualdad sin que ésta se altere.
En notación matemática esto se escribe como:
Si $a < b$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $a + c < b + c$



Si $a < b$ entonces se puede multiplicar cualquier número real c positivo a ambos miembros de la desigualdad sin que ésta se altere.
En notación matemática esto se escribe como:
Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$
Un ejemplo claro de ello es que tomemos dos números, por ejemplo 2 y 5.
Sabemos que $2 < 5$ si multiplicamos a ambos miembros de la desigualdad por

3, es decir 2×3; 5×3, y resulta que $6<15$. Se puede observar que el sentido de la desigualdad se conserva.
Pero si el número real c es negativo, la desigualdad cambia su sentido, esto se escribe como:
Si $a<b$ y $c<0$ entonces $ac>bc$
Volvamos al ejemplo anterior, sabemos que $2<5$ ahora multipliquemos a ambos miembros de la desigualdad por un número negativo por ejemplo -3, es decir $2\times(-3)$; $5\times(-3)$, y resulta que $-6>-15$. Obsérvese que la desigualdad se invierte (cambia su sentido).

Solución:

Podemos observar en el cuadro que cuando Juan tenía una actividad moderada consumía $2400\le x<2800$, pero con su cambio de actividad ahora debe ingerir de $2800\le x\le3200$. Tenemos que c es el número de calorías que debe aumentar Juan, entonces $2400+c=2800$ (ec.1) y también $2800+c=3200$ (ec.2),

De la ecuación 1, se tiene que:
$2400+c=2800$
$c=2800-2400=400$

De la ecuación 2, se tiene que:
$2800+c=3200$
$c=3200-2800=400$

Por lo que Juan tiene que consumir 400 calorías más en su ingesta diaria.

Respuesta Correcta: D) 400 calorías.

1.3 ¿Qué intervalo de edad representa entre 9 y 13 años cumplidos?

A) $(9,14)$

B) $[9,14)$

C) $(9,14]$

D) $[9,14]$

Tipos de intervalos

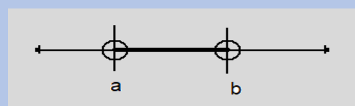
La expresión $\{x\in\Re; tal\ que\ a<x<b\}$ se conoce como intervalo, representa el conjunto de números reales que puede tomar la variable x y éstos son todos los números que se ubican entre a y b. En este caso la variable x no puede tomar el valor de a y tampoco el valor de b.
Existen diversos tipos de intervalos dependiendo de la condición de la desigualdad, estos se definirán en el siguiente recuadro.

Tipo de intervalo:

Abierto

Es el conjunto de números reales en donde la variable toma los valores entre los números a y b pero no puede tomar los valores de los extremos. Este se representa a través de paréntesis $(\ )$. Dados dos números reales a y b, la desigualdad que lo representa es: $a < x < b$

La representación gráfica utiliza una circunferencia en donde su interior no está iluminado.

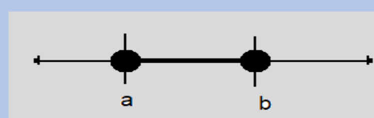


El intervalo que lo representa es: (a,b)

Cerrado

Es el conjunto de números reales en donde la variable toma los valores de los extremos. Este se representa a través de corchetes $[\ ]$.

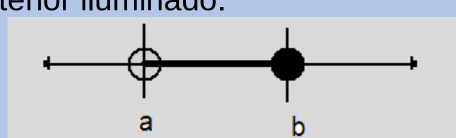
Dados dos números reales a y b la desigualdad que lo representa es: $a \le x \le b$
La representación gráfica utiliza una circunferencia en donde su interior está iluminado.



El intervalo que lo representa es: $[a,b]$

Semiabierto por la izquierda o **semicerrado** por la derecha
Es el conjunto de números reales en donde la variable no toma el valor del extremo izquierdo y sí toma en cuenta el valor del extremo derecho. Este se representa a través de un paréntesis en el extremo izquierdo y un corchete en el extremo derecho $(\ ]$.

Dados dos números reales a y b la desigualdad que lo representa es: $a < x \le b$
La representación gráfica utiliza en el extremo izquierdo (donde la variable no toma el valor de a) una circunferencia en donde su interior no está iluminado, y en el extremo derecho (donde la variable sí puede tomar el valor de b) una circunferencia con su interior iluminado.



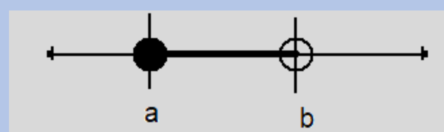
El intervalo que lo representa es: $(a,b]$

Semiabierto por la derecha o **semicerrado** por la izquierda

Es el conjunto de números reales en donde la variable toma el valor del extremo izquierdo y no toma en cuenta el valor del extremo derecho. Este se representa a través de un corchete en el extremo izquierdo y un paréntesis en el extremo derecho $[\ )$.

Dados dos números reales a y b la desigualdad que lo representa es: $a \le x < b$

La representación gráfica utiliza en el extremo derecho (donde la variable toma el valor de a) una circunferencia en donde su interior está iluminado, y en el extremo izquierdo (donde la variable no puede tomar el valor de b) una circunferencia con su interior no iluminado.



El intervalo que lo representa es: $[a,b)$

En ocasiones algunos intervalos no están limitados por un extremo; en este caso el extremo se escribe el símbolo de $-\infty$ o ∞ (menos o más infinito), indicando que por ese extremo el intervalo no tiene límite. Para el infinito, siempre se utiliza el paréntesis, ya que la variable nunca puede tomar ese valor.

Por ejemplo:

$(-\infty,5)$ Indica que la variable toma todos los valores menores que 5. La representación de la desigualdad es $x<5$
$(7,\infty)$ Indica que la variable toma todos los valores mayores que 7. La representación de la desigualdad es $x>7$

Solución:

Si se observan todos los intervalos la edad de 13 años no aparece en ninguno de ellos. El dato que aparece en todos los intervalos es de 14 años. Sabemos que 13 es menor que 14, por lo que la edad puede representarse $9 \le x < 14$, lo que representa un intervalo de $[9,14)$.

Respuesta Correcta: B) $[9,14)$

1.4 Pedro tiene sobrepeso y sabe que, para adelgazar por lo menos medio kilo por semana, un individuo debe gastar un promedio de 500 calorías más de lo que come durante todo el día. Él pesa 97 kg y por cuestiones de salud tiene que bajar al menos 10 kilogramos. Si deja de consumir 500 calorías diarias, ¿Cuántas semanas requiere como mínimo para cumplir su objetivo?

A) 2
B) 5
C) 10
D) 20

Concepto de inecuación

Una **inecuación** es una expresión algebraica de dos miembros separados por una desigualdad la cual puede ser: $<;\ >;\ \leq; \geq$.

Resolver una inecuación consiste en obtener el conjunto de valores de la incógnita que cumplen con la desigualdad, es decir, las soluciones de una inecuación son un intervalo el cuál recibe el nombre de intervalo solución.
Al igual que las ecuaciones las inecuaciones también presentan grado.
Una **inecuación de primer grado** o inecuación lineal es aquélla que la mayor potencia de sus incógnitas es uno. Por ejemplo $3x+4\geq x-8$
Una **inecuación de segundo grado** o inecuación cuadrática es aquélla donde el mayor exponente de la incógnita tiene grado 2. Por ejemplo $x^2+2x-15\geq -3$
La resolución de las inecuaciones consiste en despejar a la incógnita a través de las propiedades de las desigualdades.

Solución:

Sea x el número de semanas que necesita Pedro para bajar al menos 10 kilogramos.

Por la información sabemos que dejar de consumir 500 calorías diariamente, permite bajar medio kilogramo por semana. Si Pedro quiere bajar 10 kilogramos al menos, su peso menos lo que deja de consumir durante varias semanas debe ser menor o igual que 97-10=87 kg.

Por lo que la inecuación sería: $97-\frac{1}{2}x\leq 87$

A continuación, se resuelve la inecuación explicando la propiedad usada en cada paso.

Descripción del proceso de solución	Pasos Matemáticos
Se resta 97 a todos los miembros de la inecuación.	$97-97-\frac{1}{2}x\le 87-97$
Lo que da por resultado	$-\frac{1}{2}x\le -10$
Ahora se puede observar que $-\frac{1}{2}$ está multiplicando a la incógnita, por lo que para despejar se tiene que dividir en todos los miembros de la ecuación. Hay que recordar que es un número negativo por, lo que al realizar este paso las desigualdades cambiarán su sentido.	$\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}x\ge \frac{-10}{-\frac{1}{2}}$
El resultado al operar queda como:	$x\ge 20$
Por lo Pedro requiere al menos 20 semanas para bajar al menos 10 kilogramos de perso.	

Respuesta Correcta: D) 20 semanas.

1.5 Juana también tiene un problema de sobrepeso, actualmente pesa 68 kilogramos y al consultar a su nutriólogo le informó que ella tiene que bajar al menos 7 kilogramos, pero no más de 13 kilogramos. Si Juana deja de consumir 500 calorías diarias y no hace ninguna actividad deportiva. ¿Cuál es el intervalo de tiempo (en semanas) para que logre bajar como mínimo 7 kilogramos y como máximo 13 kilogramos?

A) $(14,26)$

B) $[14,26]$

C) $(28,52)$

D) $[28,52]$

Solución:

De la información anterior se sabe que dejar de consumir 500 calorías diarias permite reducir el peso en medio kilogramo cada semana.

Juana al bajar 7 kilogramos de peso tendría que pesar como máximo $68-7=61$ kilos y como mínimo $68-13=55$ kilogramos. Con estos datos podremos establecer las restricciones de la inecuación y esta quedaría establecida como:

$$55\le 68-\frac{1}{2}x\le 61$$

En este caso debemos obtener un intervalo para el tiempo, en otras palabras, se tiene que resolver la inecuación despejando a la incógnita con el uso de las propiedades de orden. Analicemos los pasos:

Descripción del proceso de solución	Pasos Matemáticos
Se resta 68 a todos los miembros de la inecuación.	$55 \le 68 - \frac{1}{2}x \le 61$
	$55-68 \le 68-68-\frac{1}{2}x \le 61-68$
Lo que da por resultado	$-13 \le -\frac{1}{2}x \le -7$
Ahora se puede observar que $-\frac{1}{2}$ está multiplicando a la incógnita por lo que para despejar se tiene que dividir en todos los miembros de la ecuación. Hay que recordar que es un número negativo por lo que al realizar este paso las desigualdades cambiarán su sentido.	$\frac{-13}{-\frac{1}{2}} \ge \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}x \ge \frac{-7}{-\frac{1}{2}}$
El resultado al operar queda como:	$26 \ge 1x \ge 14$
Que si lo leemos en el orden correcto sería	$14 \le x \le 26$
Esta desigualdad genera al intervalo cerrado, con extremo izquierdo en 14 y extremo derecho en 26.	$[14, 26]$
Por lo que la solución es que el número de semanas mínimas para bajar 7 kilogramos son 14 y como máximo 26 semanas.	

Respuesta correcta: B) $[14, 26]$

Situación 2. Cámara de enfriamiento

Una cámara de enfriamiento es un recinto aislado térmicamente cuya finalidad es conservar los alimentos a temperaturas específicas; coloquialmente, son los refrigeradores de las tiendas de autoservicio que contienen alimentos. Para cumplir su función utilizan un sistema frigorífico que consiste en la evaporación y condensación de un líquido refrigerante, en un determinado ciclo térmico.

Para una correcta operación de la cámara de enfriamiento la temperatura del refrigerante debe ser mayor de $-5°C$ y menor a $5°C$.

2.1 La desigualdad que representa el rango de variación de la temperatura (T) del refrigerante es:

A) $T \geq -5°C \leq 5°C$

B) $T \geq -5°C$ *ó* $T \leq 5°C$

C) $|T| \leq 5°C$

D) $|T| \geq 5°C$

Valor absoluto de un número real

El **valor absoluto** de un número real x es su distancia al cero. Debido a que un número real puede ser negativo, cero o positivo, definimos el valor absoluto de un número real como:

$$|x| = \begin{cases} -x & Si \;\; x < 0, \; negativo. \\ 0 & Si \;\; x = 0 \\ x & Si \;\; x > 0, \; positivo. \end{cases}$$

Observación:

La letra o literal x representa un número real que puede ser negativo, cero o positivo.

Por ejemplo, si: $x = -9$ entonces $|x| = |-9| = -(-9) = 9$

El valor absoluto de cualquier número es NO negativo.

Un **intervalo** se considera como un conjunto de puntos en la recta numérica, por ello es importante entender qué se entiende por un conjunto y cómo se aplica la notación conjuntista en la resolución de inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales

A continuación, se explican algunos conceptos necesarios de la teoría de conjuntos para su estudio en el manejo de intervalos.

El concepto de **conjunto** es una reunión, colección o agrupamiento de objetos de cualquier tipo que tienen una característica o propiedad común. En particular un intervalo se puede considerar como un conjunto de puntos en la recta numérica.

Para entender la notación conjuntista se explicarán algunos conceptos necesarios:

Si un elemento o miembro forma parte del conjunto, ese elemento pertenece al conjunto. En notación de conjuntos utilizamos el signo “$\in$” que significa pertenece a: por ejemplo, en el intervalo $(5,8)$ podemos observar que 7 es parte del intervalo por ello se escribe $7 \in (5,8)$. Cualquier punto de este intervalo se denota como $x \in (5,8)$ y se lee como todos los puntos x que pueden tener un valor estrictamente mayor que 5 y estrictamente menor que 8.

Dos o más conjuntos pueden generar otro conjunto por medio de ciertas operaciones entre ellos; las operaciones que se abordaran en este tema son: unión e intersección.

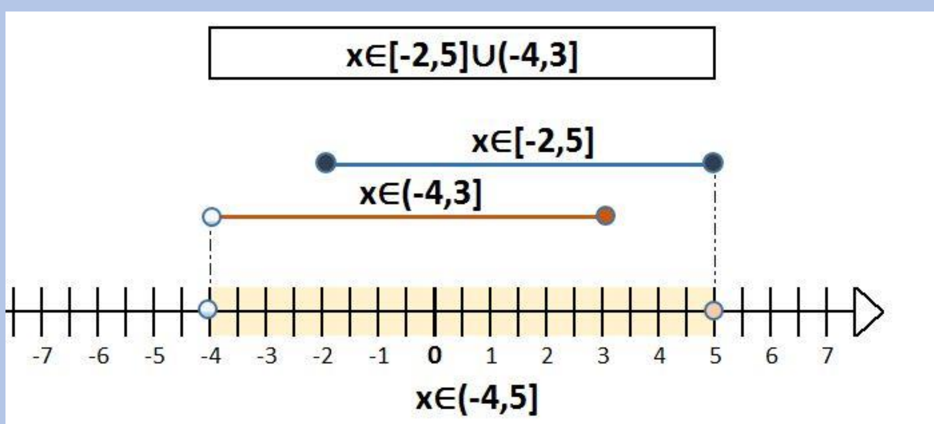
Unión de conjuntos

La unión de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$. Se define como el conjunto compuesto por todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos.

$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ó } x \in B\}$

En notación de desigualdades se puede tener que $-2 \leq x \leq 5 \ o -4 < x \leq 3$, en notación de conjuntos sería $x \in [-2,5] \cup (-4,3]$; esto se puede interpretar como todos los valores que son mayores o iguales que -2 y menores o iguales que 5 y además todos los valores que son mayores que -4 y menores o iguales que 3.Y este conjunto se conforma por el intervalo $(-4,5]$.

Gráficamente se observa de la siguiente forma:



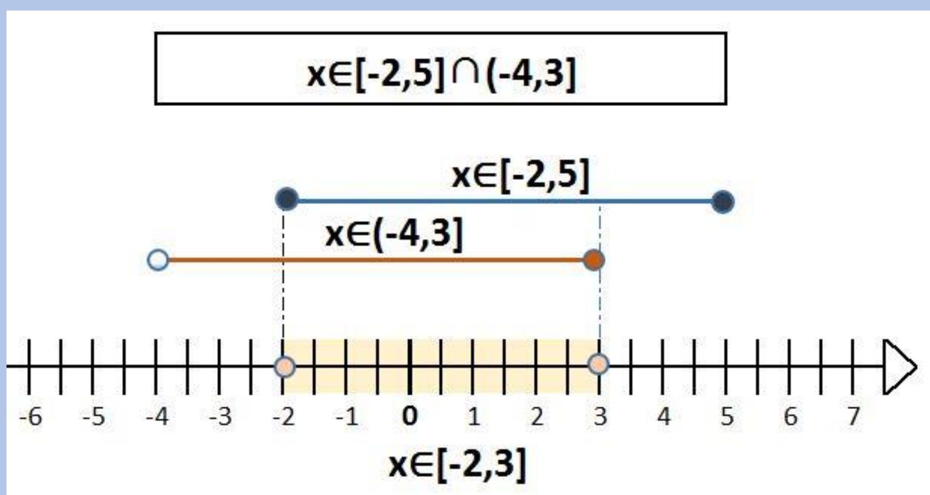
Intersección de conjuntos

La intersección de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$. Se define como el conjunto compuesto por los elementos que pertenecen a A y a B es decir a ambos.

$A \cap B = \{x / x \in A \ y \ x \in B\}$

En notación de desigualdades se puede tener que $-2 \leq x \leq 5 \ y \ -4 < x \leq 3$, y en notación de conjuntos sería $x \in [-2,5] \cap (-4,3]$; esto se puede interpretar como todos los valores que son mayores o iguales que -2 y menores o iguales que 5 y además todos los valores que son mayores que -4 y menores o iguales que 3. Los valores que están en ambos son $[-2,3]$.

Gráficamente se observa de la siguiente forma:



Solución:

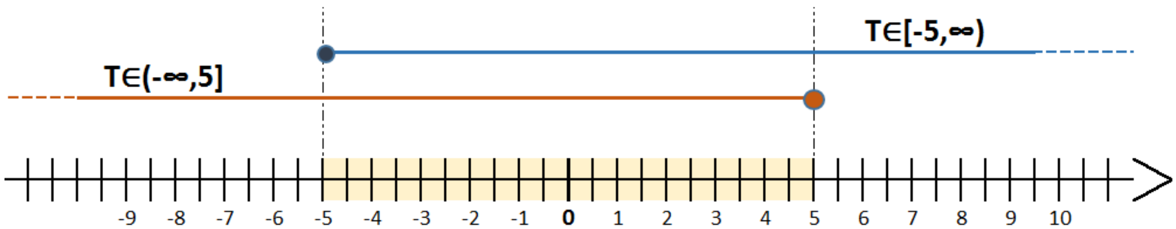
La temperatura debe ser mayor o igual a $-5°C$ y menor o igual a $5°C$.

La temperatura debe ser mayor o igual a $-5°C$ se representa en forma de desigualdad como $T \geq -5°C$, o también como $-5°C \leq T$, en notación de intervalo con el uso correcto de los paréntesis, visto en el tema 5.1 se escribe $[-5,\infty)$. Y la temperatura debe ser menor o igual a $5°C$, se representa en forma de desigualdad como $T \leq 5°C$ y en notación de intervalo como. $T \in (-\infty,5]$

Aquí es importante distinguir entre dos conectores de proposiciones, la disyunción “O” que indica la unión de los conjuntos solución de ambas proposiciones, y la conjunción “Y” que indica los conjuntos solución de ambas proposiciones se deben intersectar, para este ejercicio tenemos:

$T \in [-5,\infty)$ y $T \in (-\infty,5]$, es decir $T \in [-5,\infty) \cap (-\infty,5]$,al realizar la operación de la intersección da por resultado $T \in [-5,5]$.

En notación de desigualdad es $-5 \leq T \leq 5$, que es equivalente al $|T| \leq 5$



Respuesta correcta: C) $|T| \leq 5°C$

2.2 La representación de la temperatura en forma de intervalo es:

- **A)** $[-5,5)$
- **B)** $(-5,5)$
- **C)** $[-5,5]$
- **D)** $(-5,5]$

Observación:

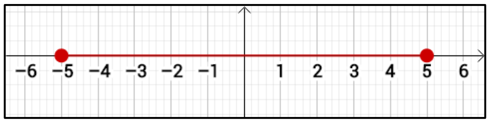
Cuando la solución de una desigualdad se representa en forma de intervalo, los extremos del intervalo deben llevar el orden de la recta, es decir si el intervalo es $[a,b]$ necesariamente: $a < b$ a es menor que b.

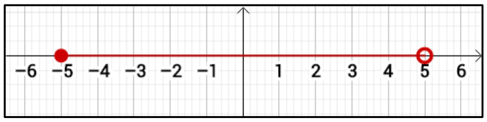
Solución:

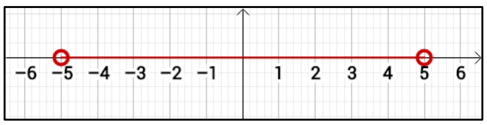
La solución incluye los extremos del intervalo y extremo izquierdo del intervalo, -5, es menor al valor del extremo izquierdo, se respeta el orden de la recta numérica.

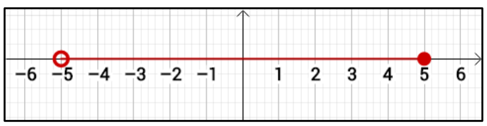
Respuesta correcta: C) $[-5,5]$

2.3 La representación gráfica del intervalo de temperatura es:

A) 

B) 

C) 

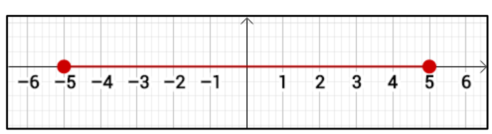
D) 

Solución:

La temperatura del frigorífico es $-5°C \leq T \leq 5°C$ ó $|T| \leq 5$, estas expresiones indican que la temperatura puede tener el valor de $-5°C$ ó $5°C$, es decir, los extremos del intervalo están incluidos.

La representación gráfica de esta desigualdad con valor absoluto es un segmento con los extremos marcados con circunferencias sombreadas. Si un extremo no es permitido se representa con una circunferencia con el interior sin sombreado.

Respuesta correcta: A).



Propiedades del valor absoluto

1) $|x| \geq 0$, para cualquier $x \in \Re$

2) $|-x| = -(-x) = x$

3) $|x|^2 = x^2$

4) $|x| = \sqrt{x^2}$, donde $\sqrt{x}$ denota la raíza no negativa de x para cualquier número $x \geq 0$

5) $|xy| = |x||y|$

6) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

7) Si $|x| = |y|$ entonces $x = y$ ó $x = -y$

8) Si $k > 0$ y $|x| \leq k$, esta expresión es equivalente a que $-k \leq x \leq k$. Esto también significa que todos los puntos en el intervalo tienen una distancia al origen menor que k, es decir, son aquellos valores de x mayores o iguales a $-k$ y menores o iguales a k.

9) Si $k > 0$ y $|x| \geq k$, esta expresión es equivalente a que $\mathrm{x} \leq -\mathrm{k}$ ó $\mathrm{x} \geq \mathrm{k}$.

10) Si $k < 0$ y $k < |x|$, esta expresión es válida para todo número $x \in \Re$

11) Si $k < 0$ y $k > |x|$, esta expresión no tiene sentido y no existe ningún valor de $x \in \Re$, que cumpla esta condición.

Situación 3. Control de calidad

En una fábrica de carpetas de argollas circulares, la comisión de control de calidad selecciona muestras aleatorias de la producción para comprobar que las especificaciones requeridas por el cliente se cumplan. El número de carpetas por lote es de 1000, el número de carpetas en la muestra de cada lote es del 5% del total.

3.1 ¿Cuántas carpetas se deben sacar de un lote de forma aleatoria para realizar la actividad de control de calidad?

A) 5
B) 50
C) 500
D) 1000

Solución:

Hay 1000 carpetas en un lote y se obtendrá un muestreo del 5% del total, es decir, 5% de 1000, entonces hay $\frac{5}{100}(1000)=50$ carpetas.

Respuesta correcta: B) 50

3.2 De un lote decidieron sacar una muestra de 90 carpetas y el cliente lo aceptará si el número de carpetas que no cumplan con las especificaciones no excede el 4% del lote. ¿Cuál es el número máximo permitido de carpetas defectuosas que no cumplan con las especificaciones del cliente al realizar el proceso de control de calidad?

A) 5
B) 4
C) 3
D) 2

Solución:

Si de un lote decidieron sacar 90 carpetas y el máximo número de carpetas que no aprueben no debe exceder el 4%, entonces no deben ser un número mayor a $\frac{4}{100}(90)=3.6$ carpetas, la respuesta es 3, por que 4 ya excede al 4%.

Respuesta correcta: C) 3

3.3 El cliente sólo aceptará lotes producidos si el error máximo en el diámetro de las argollas de 5.00 cm no excede de 0.25cm y el error en la separación entre la argolla central y las laterales no excede de 0.10cm de los 11.00cm que hay entre ellas. ¿Cuál es la desigualdad que deben cumplir las argollas para realizar el proceso de control de calidad? (Considera a d como la longitud del diámetro y a l como la separación entre argollas)

A) $\begin{cases} \left|d-\frac{1}{4}\right| \le 5 \\ \left|l-\frac{1}{10}\right| \le 11 \end{cases}$

B) $\begin{cases} |d-5| \le \frac{1}{4} \\ |l-11| \le \frac{1}{10} \end{cases}$

C) $\begin{cases} |d-11| \le \frac{1}{10} \\ |l-5| \le \frac{1}{4} \end{cases}$

D) $\begin{cases} |d-5| \ge \frac{1}{4} \\ |l-11| \ge \frac{1}{10} \end{cases}$

La distancia entre los puntos de la recta que representan a los números x, y se definen como el valor absoluto de su diferencia, es decir,

$|x-y|$ es la distancia entre x, y

El control de calidad es un proceso importante en la industria, el éxito o fracaso comercial suele depender directamente de producir bienes con las especificaciones técnicas requeridas por el cliente, entre estas especificaciones suele estar las medidas del producto. Por cuestiones propias del proceso de producción el producto suele tener diferencias a lo prometido, pero siempre se permite un margen de error.
Si x representa la medida producida del producto, a la medida técnica o ideal y e el error máximo permitido, entonces, los productos que pasan la prueba de control de calidad deben cumplir con la desigualdad siguiente:

$|x-a| < e$ ó $|x-a| \le e$

Solución:

Si d es el diámetro de la argolla producida en centímetros, $a = 5.00$ cm el diámetro ideal de la argolla solicitada por el cliente y $e = 0.25$ cm el error máximo permitido, la distancia entre d y 5 es $|d-5|$, la desigualdad solicitada es:

$|d-5| \le 0.25$ como $0.25 = \frac{1}{4}$ la expresión es equivalente a $|d-5| \le \frac{1}{4}$.

Si l es la longitud entre argollas producidas, $a = 11.00$ cm la separación ideal y $e = 0.1$ cm, la desigualdad solicitada es:

$|l-11| \le 0.1$ como $0.1 = \frac{1}{10}$ la expresión es equivalente a $|l-11| \le \frac{1}{10}$

Respuesta correcta: B) $\begin{cases} |d-5| \le \frac{1}{4} \\ |l-11| \le \frac{1}{10} \end{cases}$

6.1 ¿Cuál es el rango de valores permitidos que puede tener el diámetro de las argollas y el rango de la distancia entre ellas? (Considera a l como la separación entre argollas a l como la separación entre argollas)

A) $\begin{cases} d \in [\,5.00,\ \ 5.25] \\ l \in [11.00, 11.10] \end{cases}$

B) $\begin{cases} d \in [\,4.25,\ \ 5.25] \\ l \in [10.90, 11.90] \end{cases}$

C) $\begin{cases} d \in [\,4.75,\ \ 5.25] \\ l \in [10.90, 11.10] \end{cases}$

D) $\begin{cases} d \in [\,4.75,\ \ 5.25] \\ l \in [10.90, 11.90] \end{cases}$

Solución:

El rango o valores permitidos para el diámetro de la argolla y la distancia entre ellas se obtiene resolviendo las desigualdades de valor absoluto para el diámetro d y la distancia entre ellas l.

Para el diámetro se tiene que:

Inecuación por resolver	$\lvert d-5\rvert \leq 0.25$
Se despeja el valor absoluto	$-0.25 \leq d-5 \leq 0.25$
Se despeja el valor de d **,** para ello se suman 5 a ambos los miembros de la inecuación.	$-0.25+5 \leq d-5+5 \leq 0.25+5$ $4.75 \leq \quad d \quad \leq 5.25$
Se expresa en notación de intervalo	$d \in [4.75, 5.25]$

Para la distancia entre las argollas

Inecuación por resolver	$\lvert l-11\rvert \leq 0.1$
Se despeja el valor absoluto	$-0.1 \leq l-11 \leq 0.1$
Se despeja el valor de l **,** para ello se suman 11 a ambos miembros de la inecuación.	$-0.1+11 \leq l-11+11 \leq 0.1+11$ $10.9 \leq \quad l \quad \leq 11.1$
Se expresa en notación de intervalo	$l \in [10.9, 11.1]$

La respuesta correcta: C) $\begin{cases} d \in [\,4.75, \quad 5.25] \\ l \in [10.90, 11.10] \end{cases}$

Situación 4. El uso de llamadas y datos en celulares de prepago.

Una compañía telefónica en sus tarifas de prepago cobra $0.75 por minuto al realizar una llamada y $0.60 por cada megabyte de datos.

Tu teléfono está conectado a esta compañía celular y un buen día tu teléfono se quedó sin crédito y colocas una recarga de $30.

4.1 ¿Cuáles son las desigualdades que representan el número de llamadas (x) y el número de megabytes de datos (y) que puedes usar con esta recarga?

A) $0.60x + 0.75y \leq 30;\ \ x \geq 0;\ \ y \geq 0$
B) $0.60x + 0.75y \geq 30;\ x \geq 0;\ \ y \geq 0$
C) $0.75x + 0.60y \geq 30;\ x \geq 0;\ \ y \geq 0$
D) $0.75x + 0.60y \leq 30;\ x \geq 0;\ \ y \geq 0$

Inecuación de primer grado con dos incógnitas.

Una inecuación de primer grado con dos incógnitas se presenta cuando existen dos incógnitas y una desigualdad de por medio, ejemplo de éstas son:
Dados $a, b\ y\ c$ números reales y $x;\ y$ incógnitas.

$$ax + by < c \qquad ax + by \leq c$$
$$ax + by > c \qquad ax + by \geq c$$

Para este tipo de desigualdades, sus soluciones no corresponden a un conjunto de números, sino a un conjunto de pares ordenados, es decir, se determinan los valores de $"x"\ y\ "y"$ que cumplan con la desigualdad. Este conjunto de números no puede ser representado en una línea recta, deben de representarse como un subconjunto del plano.
La solución de una inecuación de dos variables es una pareja de números (x, y) de tal forma que, al sustituir estos valores en las incógnitas de la inecuación, hacen que se cumpla la desigualdad. Cada pareja de números reales se representa con un punto en el plano.

Solución:

Dado que la incógnita x es el número de minutos que puedes llamar y cada minuto en llamadas cuesta $0.75, y y es el número de megabytes usados por los datos y tienen un costo de $0.60 y puedes hacer uso de toda tu recarga, este se expresaría como $0.75x+0.60y\leq 30$ además se tiene que observar que el número de minutos, al igual que los megabytes usados no pueden ser negativos y por ello se exige que $x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Respuesta correcta: C) $0.75x+0.60y\leq 30;\ x\geq 0;\ \ y\geq 0$

4.2 Si sólo hicieras uso de tus llamadas, ¿Cuál es el número máximo de minutos que puedes ocupar en llamadas?

A) 35

B) 40

C) 45

D) 50

Para resolver una inecuación con dos variables, es necesario realizar lo siguiente:

Despejar el valor de y en la desigualdad lineal dada, por ejemplo, si se tiene una inecuación de la forma $ax+by<c$ al despejar la variable y queda como:

$$ax+by<c$$
$$by<c-ax$$
$$y<\frac{c-ax}{b}$$

Posteriormente se cambia el signo de la desigualdad por el de igualdad para poder obtener la ecuación de una recta.

$$y=\frac{c-ax}{b}$$

Nota:

Para graficar una recta es suficiente con conocer dos puntos de ella. Una forma fácil de obtener estos puntos en la recta es darle a la incógnita x el valor de cero, es decir sustituir a x por cero para obtener el valor de y, esto nos da la coordenada $(0,y)$ y para obtener el segundo punto hacer el valor de y igual a cero y despejas a x, de esta forma consigues la coordenada $(x,0)$

Solución:

Para obtener el número de llamadas máximo se tiene que igualar la incógnita y a cero y resolver para x:

$$\begin{aligned}&\text{De } 0.75x + 0.60y \leq 30,\ \ y = 0\\&0.75x \leq 30\\&x \leq \frac{30}{0.75} = 40\\&\text{El valor máximo } x \text{ es } 40\end{aligned}$$

Esto nos indica que el número de minutos máximo que puedes utilizar en llamadas sin hacer uso de tus datos son 40 llamadas.

Respuesta correcta: B) 40 llamadas

4.3 Si solo hicieras uso de tus megabytes en datos, ¿Cuál es número máximo de megabytes que podrías usar?
A) 35
B) 40
C) 45
D) 50

Solución:

Para obtener el número de megabytes en datos máximo, se procede de forma similar al inciso anterior:

a) Se despeja a la incógnita y de la inecuación.
b) Se cambia el signo de la desigualdad por la igualdad.

En el inciso anterior esto dio por resultado:

$$y = \frac{30 - 0.75x}{0.60}$$

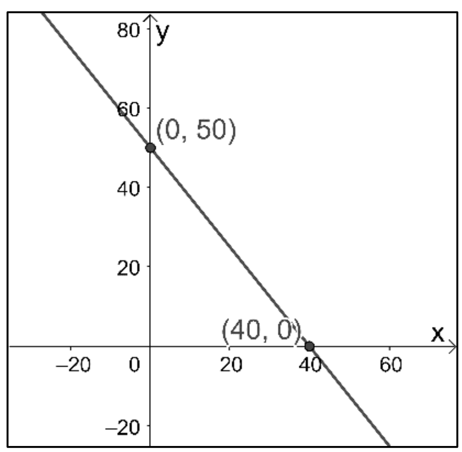
Dado que no se hace uso de llamadas en este caso el valor de la incógnita x es cero y se sustituye en la ecuación anterior, y de esa forma se obtendría el valor de la incógnita y.

$$y=\frac{30-0.75x}{0.60}$$
$$y=\frac{30-0.75(0)}{0.60}$$
$$y=\frac{30-0}{0.60}$$
$$y=\frac{30}{0.60}$$
$$y=50$$

Esto nos indica que el número de minutos máximo de megabytes que puedes utilizar en tus datos son 50.

Respuesta correcta: D) 50 megabytes.

Nota: En el ejercicio 2.2, se obtuvo una pareja ordenada de puntos la cual corresponde a $(0,40)$ y en el ejercicio 2.3 la pareja ordenada $(50,0)$ los cuales te permitirán dibujar la recta que va a delimitar la región del plano para obtener todo ese conjunto de parejas ordenadas que cumplen con toda la desigualdad.



4.4 ¿Cuál de estas opciones podrías aplicar en tu recarga de $30 según tu plan tarifario?

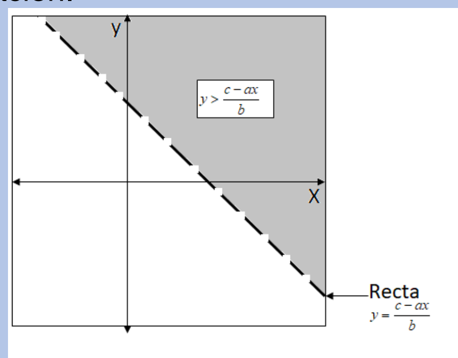
A) 20 minutos de llamadas y 30 megabytes de datos.
B) 30 minutos de llamadas y 20 megabytes de datos
C) 20 minutos de llamadas y 20 megabytes de datos.
D) 30 minutos de llamadas y 30 megabytes de datos.

Una vez graficada la recta que divide el plano se observa el tipo de desigualdad que se observa, para ello se analizará caso a caso:

Caso 1

$$y > \frac{c - ax}{b}$$

La región solución de la inecuación se encuentra por arriba de la recta, y la recta no es solución de la inecuación.

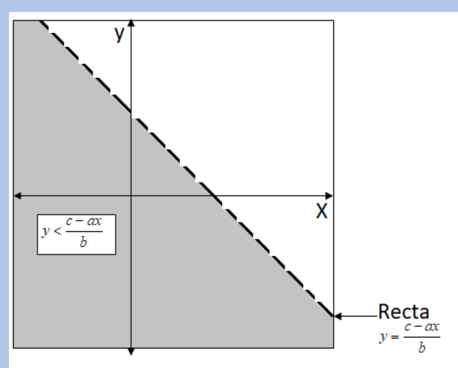


Nota: La zona gris es la región solución de la inecuación

Caso 2

$$y < \frac{c - ax}{b}$$

La región solución de la inecuación se encuentra por abajo de la recta, y la recta no es solución de la inecuación.

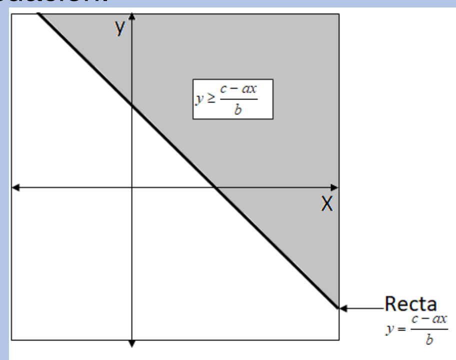


Nota: La zona gris es la región solución de la inecuación

Caso 3

$$y \geq \frac{c-ax}{b}$$

La región solución de la inecuación se encuentra por arriba de la recta, y la recta es solución de la inecuación.

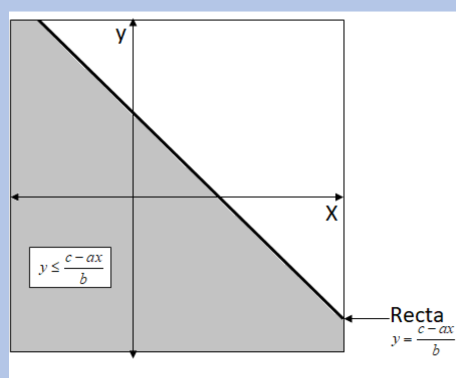


Nota: La zona gris es la región solución de la inecuación

Caso 4

$$y \leq \frac{c-ax}{b}$$

La región solución de la inecuación se encuentra por debajo de la recta, y la recta es solución de la inecuación.



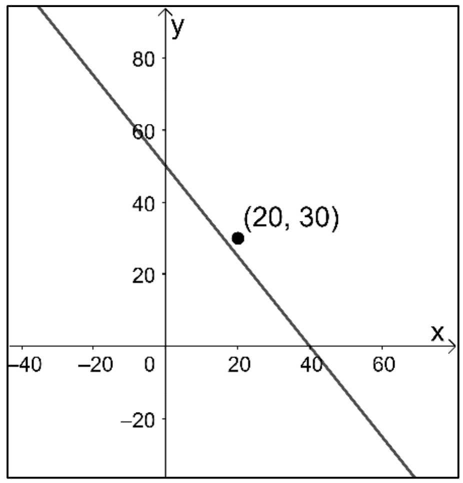
Nota: La zona gris es la región solución de la inecuación

Solución:

Cada punto representa una coordenada que puede ser graficada en el plano. En el ejercicio anterior se delimito la recta para poder establecer la región solución, y como $y \leq \frac{30-0.75x}{0.60}$, esta desigualdad corresponde al caso 4.

Esta pregunta se puede resolver de dos formas, la algebraica y la geométrica. Cada inciso de respuesta corresponde a una coordenada.

El inciso A que dice 20 minutos de llamadas y 30 megabytes de datos genera la coordenada $(20,30)$ y este punto se ubica por arriba de la recta, por lo que no es un punto solución de la desigualdad.

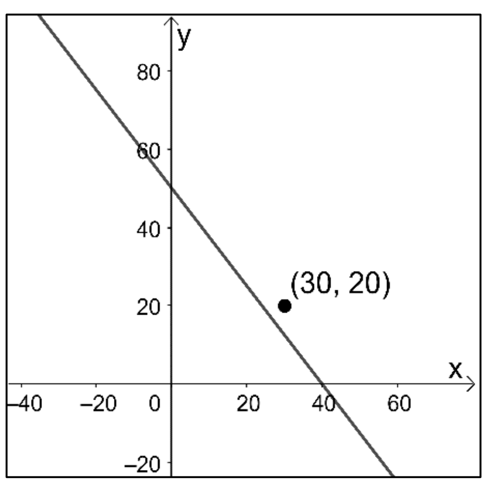


La forma algebraica consiste en sustituir los valores de las incógnitas en cada punto de la desigualdad y comprobar si esta se cumple o no.

$$30 \leq \frac{30-0.75(20)}{0.60}$$
$$30 \nleq \frac{30-15}{0.60} = \frac{15}{0.60} = 25$$

Como 30 no es menor que 25, entonces esta coordenada no cumple con los valores de la desigualdad

De forma análoga el inciso B genera la coordenada $(30,20)$ y también este punto se encuentra por arriba de la recta.

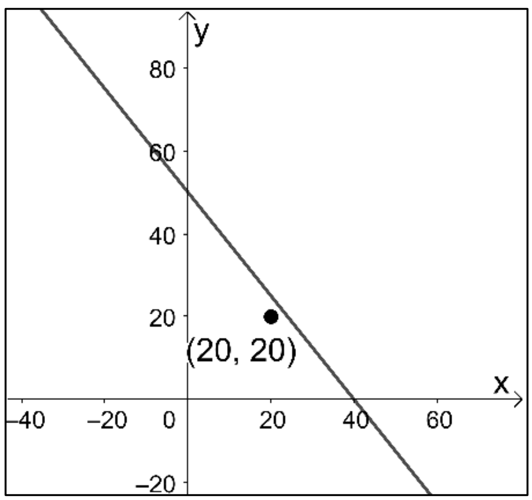


De forma algebraica

$$20 \leq \frac{30-0.75(30)}{0.60}$$
$$20 \not\leq \frac{30-22.5}{.60} = \frac{7.5}{.60} = 12.5$$

Este es el mismo caso que el anterior, 20 no es menor que 12.5, por lo que esta coordenada tampoco cumple con la desigualdad.

El inciso C genera la coordenada $(20,20)$, este punto se ubica por debajo de la recta.

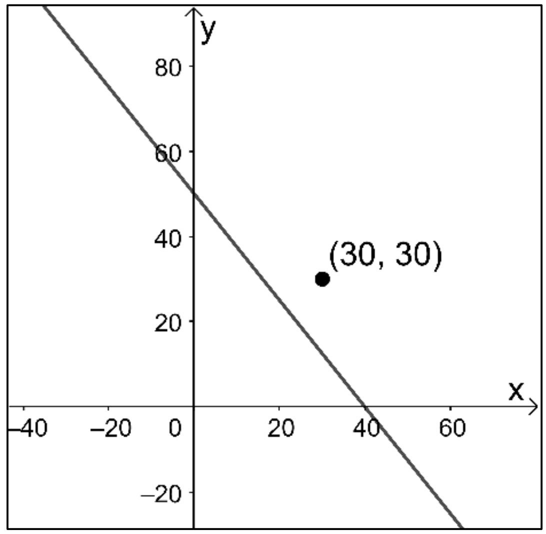


De forma algebraica

$$20 \leq \frac{30-0.75(20)}{0.60}$$
$$20 \leq \frac{30-15}{.60} = \frac{15}{.60} = 25$$

En este caso se puede observar que 20 si cumple con ser menor que 25, por ello esta pareja ordenada, si cumple con la desigualdad.

El inciso D genera la coordenada $(30, 30)$, este punto se ubica por arriba de la recta.



De forma algebraica

$$30 \leq \frac{30 - 0.75(30)}{0.60}$$

$$30 \nleq \frac{30 - 22.5}{0.60} = \frac{7.5}{0.60} = 12.5$$

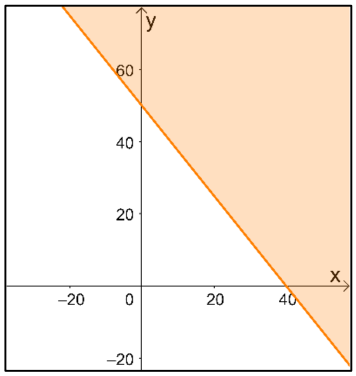
Esta pareja ordenada tampoco cumple con la desigualdad, dado que 30 no es menor que 12.5.

Por lo que la pareja ordenada que cumple con la desigualdad es el $(20, 20)$ ya que se ubica por debajo de la recta y algebraicamente cumple con las condiciones de la desigualdad

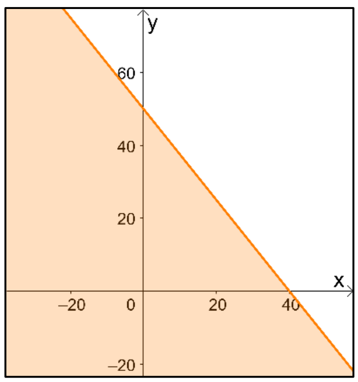
Respuesta Correcta: C) 20 minutos de llamadas y 20 megabytes de datos.

4.5 ¿Cuál es la región que muestra las combinaciones de megabytes de datos y llamadas que se pueden realizar con esta recarga?

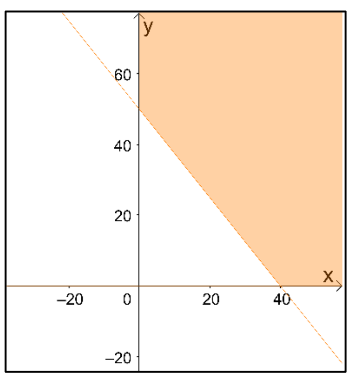
A)



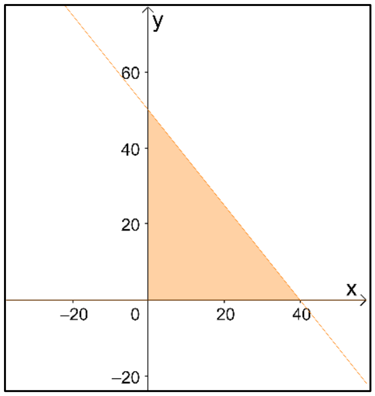
B)



C)



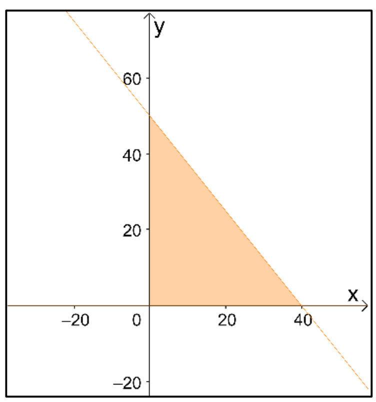
D)



Solución:

Por la desigualdad sabemos que el conjunto de puntos que cumple con ella, son todos los que se ubican por debajo de ella. Pero el contexto del problema no permite que existan llamadas negativas, por lo que el eje X también acota a la región y estos sólo puede ser positivo, el mismo contexto se da para el uso de los datos, donde estos también se tienen que observar la parte positiva del eje Y. En adición se tiene que observar que todos los puntos de la recta también forman parte de la región solución de la desigualdad.

Repuesta correcta: D)



Ahora se analizará cómo se soluciona un sistema de ecuaciones en dos variables. En el tema anterior se estudió la desigualdad lineal en dos variables x e y, como una relación de la forma, $Ax+By+C<0$ donde su solución consiste en determinar el conjunto de parejas ordenadas (x,y) que satisfacen la desigualdad, y los valores de las incógnitas x e y se visualizan en el plano cartesiano.

Existen problemas en la industria, la ciencia, y otras áreas del conocimiento humano, donde su modelo de solución es un conjunto de dos o más inecuaciones lineales. A esto se le conoce como un sistema de inecuaciones lineales y el área de las matemáticas que se encarga del estudio de este tipo de problemas se denomina Programación Lineal.

Situación 5. Máquinas de café

Un dispensador de café está programado para entregar dos tipos de vasos de café, uno con una carga de 9 gramos (g) de café molido y el otro de 12 g. El depósito tiene una capacidad de 500 gramos de café.

5.1 Escribe la expresión que determina el número de vasos de café que pueden servirse para cada tipo, de 9 g o 12 g, antes de que sea necesario recargar el depósito. (Considera x como el número de vasos con una carga de 9 g de café, así como y el número de vasos con carga de 12 g de café)

A) $\begin{cases} x + y \geq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 9x + 12y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 9x + 12y \geq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

D) $\begin{cases} x + y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Solución:

El primer paso es identificar qué deseamos calcular, se solicita el número de vasos de café de 9 y 12g que se pueden servir antes de que se vacíe el depósito. Hay que asignar una literal a estas cantidades:
Sea x el número de vasos con una carga de 9g de café, así como y el número de vasos con carga de 12g de café.

Establecida esta correspondencia observamos que cada taza de café x requiere 9g de café, es decir, $9x$, de igual forma representamos con $12y$ el café consumido por las tazas de 12g. La máquina tiene un depósito con 500g de capacidad de café, por lo que la relación que representa el número de vasos que podría servir la máquina es de:

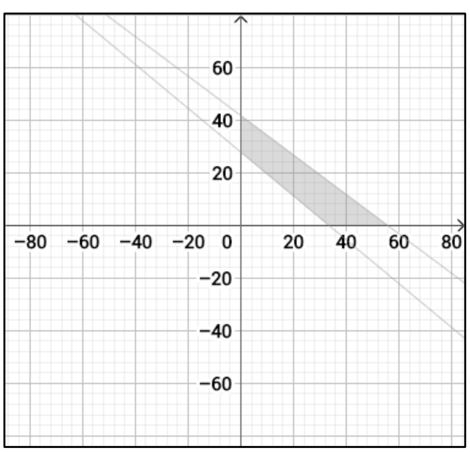
$$\begin{cases} 9x + 12y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

El número de vasos utilizados es estrictamente mayor o igual a cero, vasos negativos no tiene sentido.

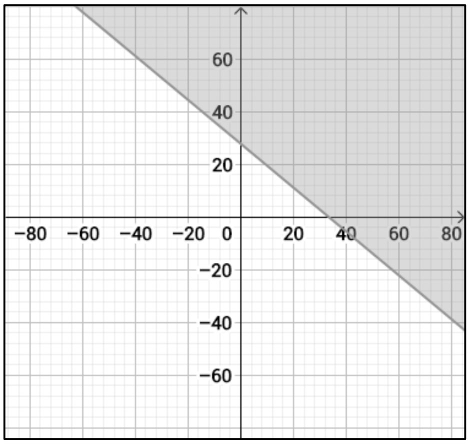
Respuesta correcta: B) $\begin{cases} 9x + 12y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

5.2 El propietario de la máquina vende a 15 pesos el vaso de la carga de 9g y a 18 pesos el vaso con 12g de café. El costo de 500g de café es de 100 pesos, el costo de los vasos es de 2 pesos el de 9g y 3 pesos el de 12g. El dueño de la máquina expendedora quiere saber cuántos vasos debe vender para tener un ingreso por ventas mayor a 500 pesos antes de que se vacíe el depósito, la gráfica que le indica esta información es:

A)

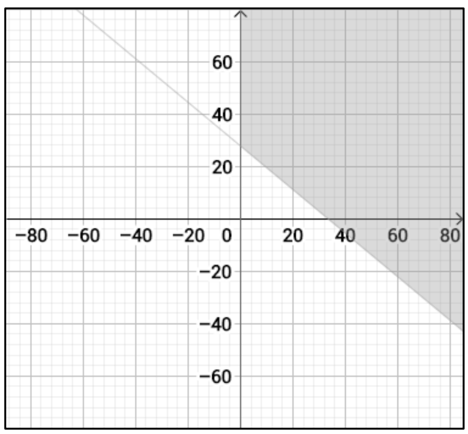


B)



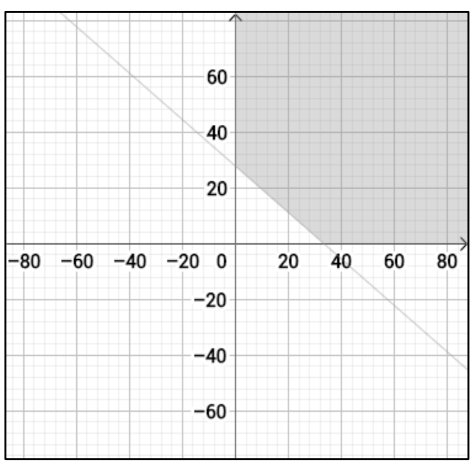
60
40
20
−80 −60 −40 −20 0 20 40 60 80
−20
−40
−60

C)



60
40
20
−80 −60 −40 −20 0 20 40 60 80
−20
−40
−60

D)



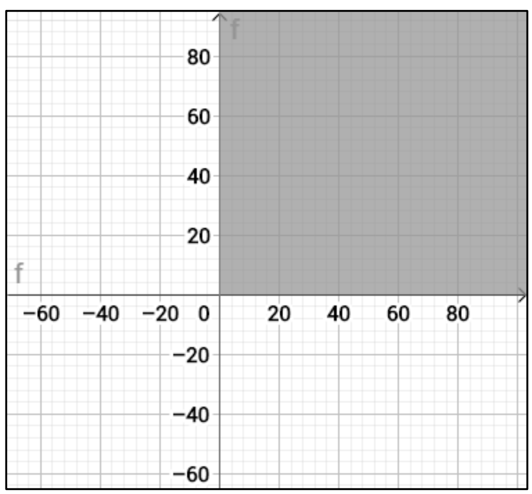
60
40
20
−80 −60 −40 −20 0 20 40 60 80
−20
−40
−60

Procedimiento general para graficar un sistema de dos inecuaciones

El primer paso es graficar la primera inecuación o desigualdad y sombrear la región solución 1, en seguida, hacer lo mismo para la segunda inecuación, pero sombrear de forma diferente (otro color o tipo de línea) la región solución 2, y así sucesivamente. La región solución del sistema es aquella región donde se traslapan las regiones sombreadas.

Solución:

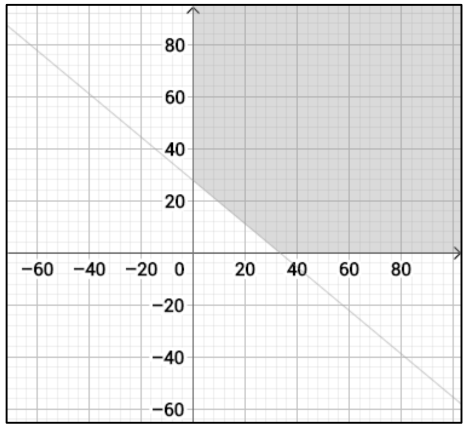
El número de vasos debe ser mayor o igual a cero, no tiene sentido el valor de vasos negativos, la región que satisface las condiciones $x \geq 0$; $y \geq 0$ es la región que corresponde al primer cuadrante del plano.



El dueño desea conocer la cantidad de vasos para tener un ingreso mayor a 500 pesos, por lo que debe plantear la desigualdad de ingreso por ventas, en función de los vasos de 9 y 12g de café, que vende a 15 y 18 pesos respectivamente; dicha desigualdad o inecuación es:

$$\begin{cases} 15x + 18y \geq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

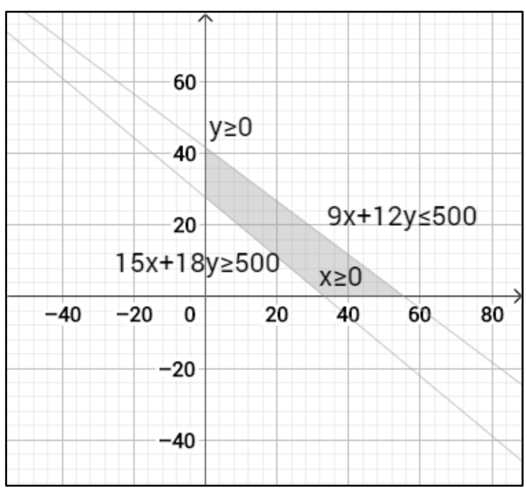
La región anterior con esta restricción es:



Adicionalmente, el dueño agrega la siguiente restricción, “antes de que se vacíe el depósito”, es decir, el total de café vendido en vasos de 9g y 12g no debe exceder los 500g de café en el depósito:

$$\begin{cases} 9x + 12y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La restricción acota o limita la región anterior en la siguiente:



Respuesta correcta: A)

5.3 El proveedor de vasos no ha pasado y la máquina de café se queda sin vasos de 9 g después de vender 32, ¿cuál es el rango de vasos de 12 g que se pueden vender antes de vaciarse el depósito?

A) $[0,17]$

B) $[0,18]$

C) $[-24,17]$

D) $[-24,18]$

Solución:

Se han vendido 32 vasos de 9 g de café que equivale a, $32(9g)=288g$ así que de los 500 g iniciales restan 212 g que se consumirán en vasos de 12 g. Hay que desarrollar la desigualdad de gramos de café.

La inecuación por solucionar es:	$0\le 9x+12y\le 500$
Se sustituye el valor de $x=32$ ya que estos son los vasos ya vendidos.	$0\le 9(32)+12y\le 500$ $0\le\ 288+12y\ \le 500$
Se trata de despejar a la variable y. Para ello, se resta 288 de ambos miembros de la inecuación.	$-288\le 288-288+12y\le 500-288$ $-288\le 12y\le 212$
Ahora para despejar a y se divide toda la inecuación entre 12.	$\frac{-288}{12}\le\frac{12y}{12}\le\frac{212}{12}$ $-24\le\ y\ \le 17.6\overline{6}$ $-24\le\ y\ \le 17\frac{2}{3}$
Como y es positivo y no puede haber fracciones de vaso, se redondea al menor entero que es 17.	$0\le y\le 17$
La representación de intervalos	$y\in[0,17]$

El rango de vasos de vasos con una carga de 12 g de café que pueden ser vendidos es de ninguno a 17.

Respuesta correcta: A) $[0,17]$

ACTIVIDADES DE REFORZAMIENTO

Situación 6. El costo del equipaje extra en las aerolíneas nacionales.

Las aerolíneas imponen a sus clientes un límite de peso en kilogramos para documentar equipaje, por lo que cada kilogramo extra genera un costo adicional que va desde $50 hasta $140 para vuelos nacionales, de acuerdo con los datos de las empresas.

A continuación, se muestran los costos de varias aerolíneas nacionales por equipaje extra.

Interjet, permite a los pasajeros documentar 25 kilogramos sin cargos extra y tiene una tarifa de 80 pesos por kilogramo adicional.

La tarifa de Viva Aerobus por kilo extra es de $100, pero el límite de equipaje para documentar depende de la categoría del boleto adquirido. Si se compró un boleto de VivaLight, el usuario no tiene derecho a registrar maletas; un boleto de VivaBásico permite valijas de hasta 15 kilogramos; y uno de VivaPlus, 25.

Aeroméxico ofrece documentar 25 kilogramos en clase turista y en caso de excedentes en el rango de 26 a 45 kilos, el cobro es de $99 por kilo.
Volaris tiene los costos más altos del mercado pues sólo permite documentar 15 kilogramos y por cada kilo extra cobra 140 pesos.

Sánchez, J. (2013/10/15) ¿Qué aerolínea te cobra más por equipaje extra? "El Financiero" en línea: https://www.elfinanciero.com.mx/archivo/que-aerolinea-te-cobra-mas-por-equipaje-extra
Modificado con precios más actuales.

6.1 Una persona que viaja en un vuelo nacional por Volaris compra diferentes regalos para sus conocidos, piensa que su equipaje pesa de 20 a 40 kilogramos. ¿Cuánto dinero debe de reservar para cubrir el pago del equipaje extra? (Referirlo en un intervalo).

A) $[\$250, \$750]$

B) $[\$700, \$3500]$

C) $[\$1000, \$2000]$

D) $[\$2800, \$5600]$

6.2 Juan regresa de Cancún a la CDMX por Aeroméxico en un vuelo comercial, pero sólo cuenta con $1980 para su equipaje extra. ¿Cuál es la inecuación que determina el número de kilogramos (x) que puede llevar Juan al tomar su vuelo?

A) $99x-25\leq 1980$

B) $99(x-25)\leq 1980$

C) $25+99x\leq 1980$

D) $99x\leq 1980$

6.3 ¿Qué rango de equipaje en kilogramos puede llevar Juan en su regreso a la CDMX desde Cancún?

A) $[0Kg, 19.75Kg]$

B) $[0Kg, 20.00Kg]$

C) $[0Kg, 20.25Kg]$

D) $[0Kg, 45.00Kg]$

6.4 Luis va a tomar un viaje a Monterrey para visitar a sus familiares, como tiene mucho tiempo de no verlos lleva varios souvenirs para regalar, calcula que su equipaje pesa alrededor de 28 a 33 kilogramos. Él ha cotizado diversas aerolíneas y el costo de los vuelos son los siguientes:

VivaBásico $1705, Volaris $1730, Aeroméxico $1809 e InterJet $1896. Luis ha establecido una tabla con los rangos de precios para cada cotización. ¿Cuál tabla obtuvo Luis?

A)

Aerolínea	Intervalo de Precios
Viva Básico	$[\$3005, \$3505]$
Volaris	$[\$3550, \$4250]$
Aeroméxico	$[\$2196, \$2601]$
InterJet	$[\$2136, \$2536]$

B)

Aerolínea	Intervalo de Precios
Viva Básico	$[\$4505, \$5005]$
Volaris	$[\$5650, \$6350]$
Aeroméxico	$[\$4581, \$5076]$
InterJet	$[\$4136, \$4536]$

C)

Aerolínea	Intervalo de Precios
Viva Básico	$[\$2800, \$3300]$
Volaris	$[\$1820, \$2520]$
Aeroméxico	$[\$2772, \$3267]$
InterJet	$[\$2240, \$2690]$

D)

Aerolínea	Intervalo de Precios
Viva Básico	$[\$2905, \$3105]$
Volaris	$[\$3410, \$4110]$
Aeroméxico	$[\$2007, \$2502]$
InterJet	$[\$2056, \$2456]$

6.5 ¿Qué aerolínea es la más económica para el equipaje que lleva Luis?
A) Viva Básico
B) Volaris
C) Aeroméxico
D) InterJet

6.6 María desea viajar a Guadalajara, cuenta con un presupuesto para su viaje de ida de $2000 a $2500 pesos. Sabe que el vuelo por InterJet cuesta $1589 ¿Cuál es la inecuación que muestra el rango de equipaje total que puede llevar María en su viaje con este presupuesto?
A) $411 \leq 80x \leq 911$
B) $411 \leq 80(x-25) \leq 911$
C) $2000 \leq 80x \leq 2500$
D) $2000 \leq 80(x-25) \leq 2500$

6.7 ¿Cuál es el intervalo de equipaje total que puede llevar María con su presupuesto?
A) $[25.00, 31.25]$
B) $[50.00, 56.25]$
C) $[5.1375, 11.3875]$
D) $[30.1375, 36.3875]$

Situación 7. Calentamiento Global

El calentamiento global o cambio climático es el aumento observado en más de un siglo de la temperatura del sistema climático de la Tierra y los efectos de aquel aumento. La temperatura promedio de la superficie de la Tierra es de 15°C, la mayoría de los modelos del calentamiento global predicen un aumento de temperatura $\Delta T = 3°C \pm 1°C$ en el año 2,100.

https://es.wikipedia.org/wiki/Calentamiento_global

7.1 La representación de la variación de temperatura con una desigualdad con valor absoluto es:

A) $|\Delta T| \leq 3$

B) $2 \leq |\Delta T| \leq 4$

C) $|\Delta T - 1| \leq 3$

D) $|\Delta T - 3| \leq 1$

7.2 El intervalo que representa la variación de la temperatura (ΔT) que puede haber para el año 2,100 es:

A) $[1°C, 3°C]$

B) $[3°C, 4°C]$

C) $[2°C, 4°C]$

D) $[4°C, 5°C]$

7.3 El valor de la temperatura promedio ($\overline{T}$) de la Tierra para el año 2,100 de acuerdo con la mayoría de los modelos se representa con la inecuación:

A) $14°C \leq \overline{T} \leq 16°C$

B) $17°C \leq \overline{T} \leq 19°C$

C) $13°C \leq \overline{T} \leq 17°C$

D) $15°C \leq \overline{T} \leq 18°C$

Situación 8. Clases privadas de regularización

Un alumno de la ENP ha reprobado dos materias Física y Matemáticas, sus padres le han castigado y le comentan que con su beca de $900 mensuales tiene que pagar sus clases de regularización. Él ha cotizado en diversos lugares y el que más le conviene cuesta $90 pesos por hora la clase de matemáticas y $75 pesos por hora la clase de física.

8.1 ¿Cuál es la desigualdad que determina el número de horas que puede tomar este alumno de clases de matemáticas (x) y física (y)?

A) $\begin{cases} 90x + 75y \geq 900 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 75x + 90y \leq 900 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 90x + 75y \leq 900 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

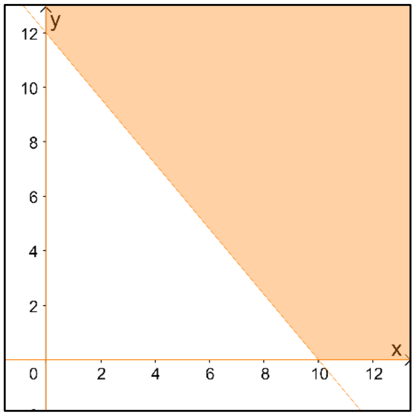
D) $\begin{cases} 75x + 90y \geq 900 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

8.2 ¿Cuál de las siguientes opciones es posible que pueda cubrir el alumno con su beca?

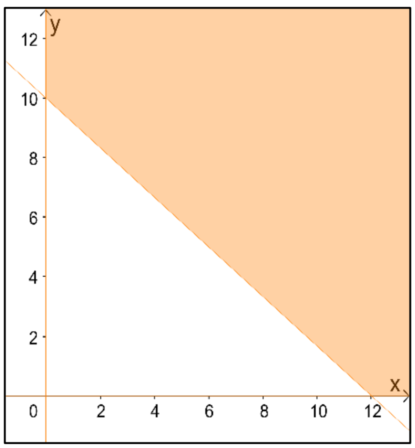
A) 5 clases de física y 7 de matemáticas.
B) 7 clases de física y 5 de matemáticas.
C) 8 clases de matemáticas y 3 de física
D) 3 clases de matemáticas y 8 de física

8.3 ¿Cuál de las siguientes regiones representan el rango de número de clases de física y matemáticas que puede tomar?

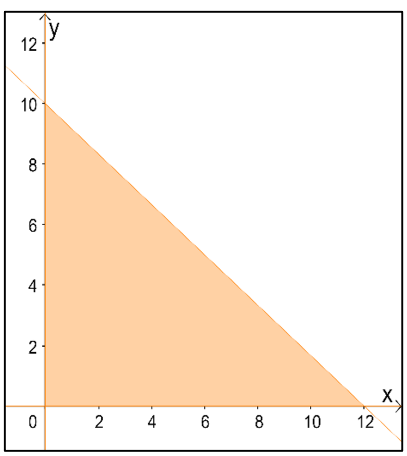
A)



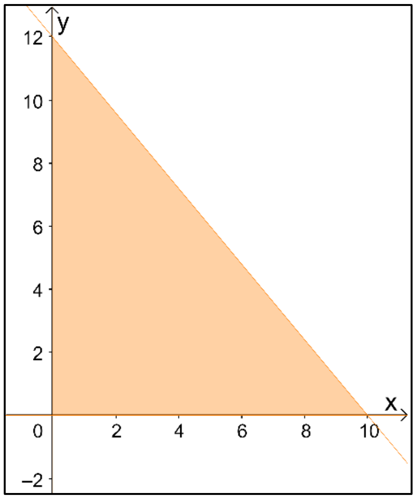
B)



C)



D)



8.4 El maestro de matemáticas, al ver la angustia y el interés del alumno decide que le va a bajar el costo de la hora un 20%y además sus papás le ayudan con $900 más. Bajo estas condiciones ¿cuáles son las desigualdades que modelan esta situación?

A) $\begin{cases} 75x + 72y \leq 1800 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

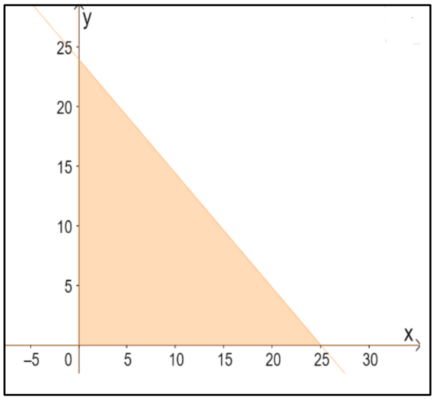
B) $\begin{cases} 72x + 75y \leq 1800 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 60x + 90y \leq 1800 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

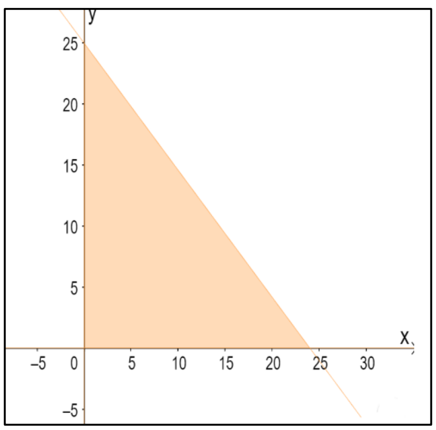
D) $\begin{cases} 60x + 90y \geq 1800 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

8.5 Bajo las condiciones del problema anterior**, ¿c**uál es la región que modela el número de horas que puede solicitar el alumno?

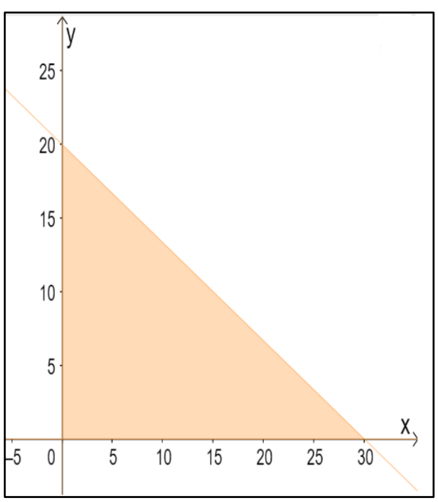
A)



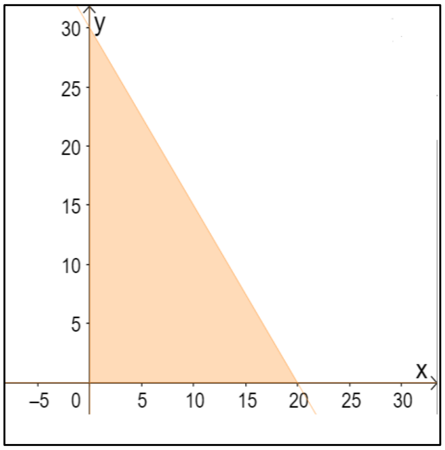
B)



C)



D)



Situación 9. Taller de costura

Un taller familiar fabrica camisas y pantalones, para unir las piezas de tela cortadas utiliza una máquina A y para los detalles una máquina B; ambas máquinas trabajan 10 horas al día durante 6 días de la semana. La manufactura de una camisa demanda una hora de la máquina A y dos de la B, los pantalones utilizan una hora de cada máquina. (Considera que el número de camisas manufacturadas se representa con la literal x y el número de pantalones manufacturados con y.

9.1 ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que representa la restricción de tiempo para utilizar la máquina tipo A de costura?

A) $\begin{cases} x+y \le 60 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 2x+y \le 60 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} x+y \le 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

D) $\begin{cases} 2x+3y \le 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

9.2 ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que representa la restricción de tiempo para utilizar la máquina B?

A) $\begin{cases} x + y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

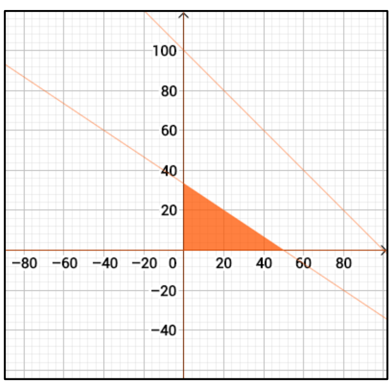
B) $\begin{cases} 2x + y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

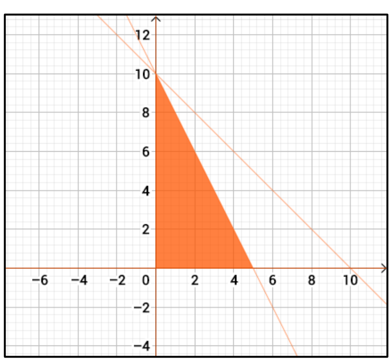
D) $\begin{cases} 2x + 3y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

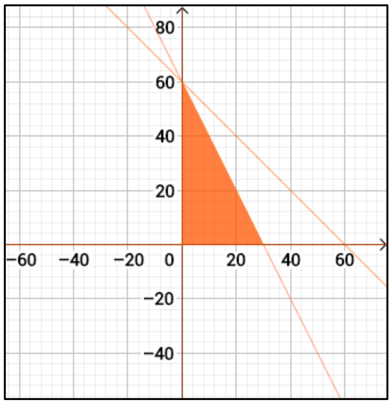
9.3 ¿Qué gráfica corresponde a la región solución para el tiempo de uso ambas máquinas para camisas y pantalones completamente terminados?

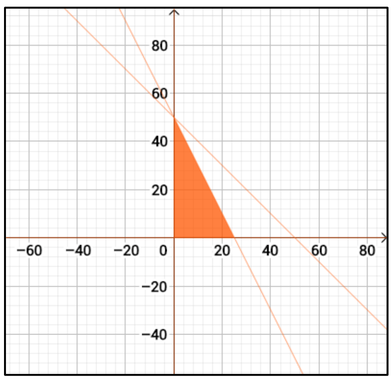
A)



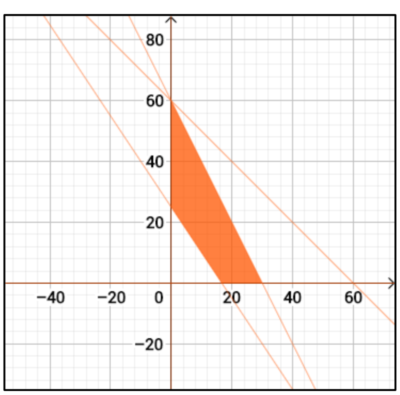
B)



C) 

D) 

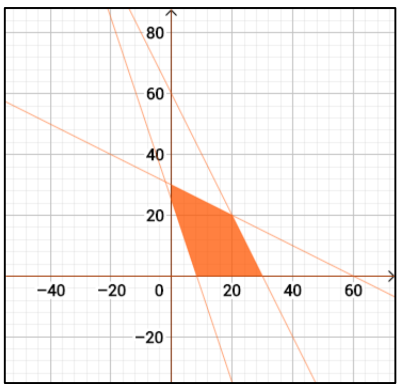
9.4 Con la región solución para el tiempo de uso ambas máquinas para camisas y pantalones completamente terminados y si la ganancia por la venta de cada unidad es de veinte pesos la camisa y treinta por el pantalón. El taller tiene los clientes suficientes para vender cualquier cantidad de camisas y / o pantalones que manufacturen. La gráfica de la región solución que permite al taller tener una ganancia semanal mayor 1 200 pesos es:

A) 

B)

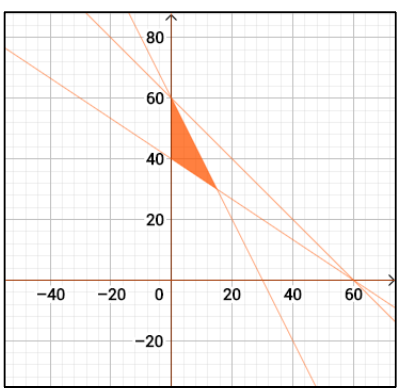
80
60
40
20
−40
−20
0
20
40
60
−20

C)



80
60
40
20
−40
−20
0
20
40
60
−20

D)



80
60
40
20
−40
−20
0
20
40
60
−20

RESPUESTAS A LAS ACTIVIDADES DE REFORZAMIENTO

6.1 B)	**6.2 B)**	**6.3 D)**	**6.4 A)**	**6.5 D)**	**6.6 B)**	**6.7 D)**
7.1 D)	**7.2 C)**	**7.3 B)**				
8.1 C)	**8.2 D)**	**8.3 D)**	**8.4 B)**	**8.5 A)**		
9.1 A)	**9.2 B)**	**9.3 C)**	**9.4 D)**			

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

American Academy of Pediatrics (s.f.) Ingestión de calorías (energía): cantidades de alimentos y bebidas recomendadas para los niños. Fecha de consulta: 03:06, octubre 23, 2019 desde ttps://www.healthychildren.org/Spanish/healthy-living/nutrition/Paginas/Energy-In-Recommended-Food-Drink-Amounts-for-Children.aspx.

Angel & Rounde (2019). *Álgebra Intermedia* (9° ed.) México: Pearson.

Arends & Lardner (1992). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía* (3°ed). México: Prentice Hall.

Calentamiento global. (2019, 21 de octubre). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: 03:06, octubre 23, 2019 desde https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Calentamiento_global&oldid=120603964.

De Oteyza, et. al. (2018). *Álgebra* (5° ed.) México: Pearson.

Sánchez, J. (2013/10/15) *¿Qué aerolínea te cobra más por equipaje extra?* "El Financiero" en línea: https://www.elfinanciero.com.mx/archivo/que-aerolinea-te-cobra-mas-por-equipaje-extra

EXAMENES TIPO EXTRAORDINARIO

EXAMEN 1

Situación 1. Primer ingreso

En el informe 2011-2017 de la Facultad de Ciencias de la UNAM se dio cuenta de los ingresos de los alumnos que ingresan en distintas carreras ya existentes y en las recién creadas. La siguiente tabla muestra las cantidades en las respectivas carreras y el total de ingresos por año.

Primer ingreso	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Actuaría	374	381	385	387	391	393
Biología	481	497	508	481	478	470
Ciencias de la Computación	114	114	120	118	117	125
Ciencias de la Tierra	117	125	126	130	136	125
Física	344	348	367	376	381	384
Física Biomédica				25	45	46
Manejo Sustentables de Zonas Costeras	10	19	15	15	10	21
Matemáticas	305	321	280	299	335	362
Matemáticas Aplicadas						55
Facultad de Ciencias	1745	1805	1801	1831	1893	1981

Fuente: Agenda Estadística UNAM 2012 – 2017

1.1. ¿Qué razón hay entre la cantidad de estudiantes de primer ingreso de ciencias de la computación y matemáticas en 2013? [Valor 2 puntos.]

A) $\frac{3}{7}$
B) $\frac{3}{2}$
C) 2
D) 3

1.2. ¿Cuál es el promedio de ingresos (redondeado a décimas) a la Facultad de Ciencias en estos seis años? [Valor 2 puntos.]

A) 1841
B) 1943
C) 1843
D) 1941

1.3. ¿Cuál es la carrera que más ha incrementado su matrícula, considerando únicamente 2011 y 2016? [Valor 1 punto.]

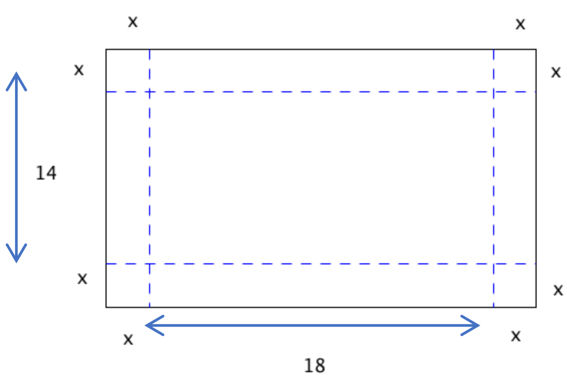
A) Actuaría
B) Biología
C) Física
D) Matemáticas

1.4. La carrera que ha ido en decremento de sus ingresos es: [Valor 1 punto]

A) Actuaría
B) Bilogía
C) Física
D) Matemáticas

Situación 2. Cajas decorativas

En un taller de fabricación de cajas de cartón (corrugados), se desea construir una caja rectangular sin tapa, con un cartón de $14x18\ cm$ al realizar un corte cuadrado en cada esquina y al doblar por las líneas punteadas. Ver figura.



2.1 ¿La expresión algebraica que representa el volumen de la caja es? [Valor 3 puntos]

A) $4x^3 - 64x^2 + 252x$
B) $4x^3 - 32x^2 + 252x$
C) $4x^3 + 32x^2 - 252x$
D) $4x^3 + 64x^2 - 252x$

2.2 ¿Cuál es el factor común de la expresión algebraica que representa al volumen? [Valor 1 puntos]

A) $4x^2$
B) $4x^3$
C) $4x$
D) 4

2.3 ¿Cuál es la factorización máxima de la expresión algebraica que representa al volumen? [Valor 2 puntos]

A) $2x(2x-18)(x-7)$

B) $x(x-9)(2x-14)$

C) $x(2x-18)(2x-14)$

D) $4x(x-9)(x-7)$

2.4 Si el tamaño de los cuadrados recortados es de 2 cm, ¿cuál es el volumen? [Valor 2 puntos]

A) $270cm^3$

B) $280cm^3$

C) $270cm^2$

D) $280cm^2$

Situación 3. La moda verde

La industria textil es una de las más importantes en nuestro país. Sin embargo, también es una de las que más contamina en el mundo, pues consume una gran cantidad de agua y la que desecha contiene colorantes tóxicos que son muy dañinos para el medio ambiente y difíciles de degradar.

Los desechos textiles deben recibir un trato apropiado, pues muchos de estos van a parar a basureros donde pueden filtrar sustancias químicas peligrosas a las aguas subterráneas.

Donar, reciclar, regalar o revender la ropa que no usas puede ayudar a combatir este problema.

3.1 Fabricar unos pantalones de mezclilla y una camiseta puede requerir aproximadamente 5000 litros de agua. Si en promedio una persona bebe 2 litros de agua al día, ¿qué expresión calcula el número de años, t, que satisface el consumo de una persona? [Valor 1 punto]

A) $t=\frac{2500}{365}$

B) $t=\frac{5000}{365}$

C) $t=\frac{5000}{2}$

D) $t=\frac{365}{2500}$

3.2 La función $G(x) = -x^2 + 9x + 90$, describe las ganancias (en millones de pesos) durante el primer trimestre de 2019, obtenidas por la fábrica de ropa *Textiles Modernos*, en Jalisco, México. ¿para cuál de los siguientes valores no se obtendría ninguna ganancia? [Valor 2 puntos]

A) $x_1 = 15$

B) $x_1 = 51$

C) $x_1 = \frac{11}{2}$

D) $x_1 = -\frac{11}{2}$

3.3 Se estima que una prenda de *moda rápida* que se usa menos de 5 veces y se tira a los 35 días produce más de 400% emisiones de carbono que la que se usa 50 veces en un año. Si Rosa compró una blusa y la usó solamente en tres ocasiones y la tiró a las 5 semanas, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

[Valor 2 puntos]

A) Rosa al usar la blusa menos de tres ocasiones y tirarla en 35 días, produjo 4 veces menos emisiones de carbono

B) Rosa al usar la blusa solo en tres ocasiones y tirarla en 35 días, produjo 4 veces más emisiones de carbono

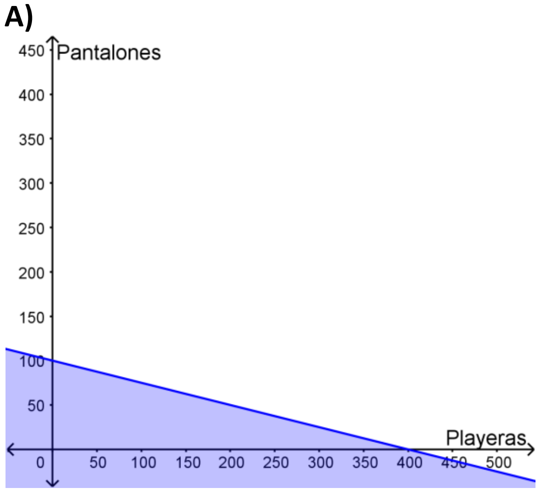
C) Rosa al usar la blusa más de diez ocasiones y tirarla en 35 días, produjo 4 veces más emisiones de carbono

D) Rosa al usar la blusa solo en diez ocasiones, produjo 4 veces menos emisiones de carbono

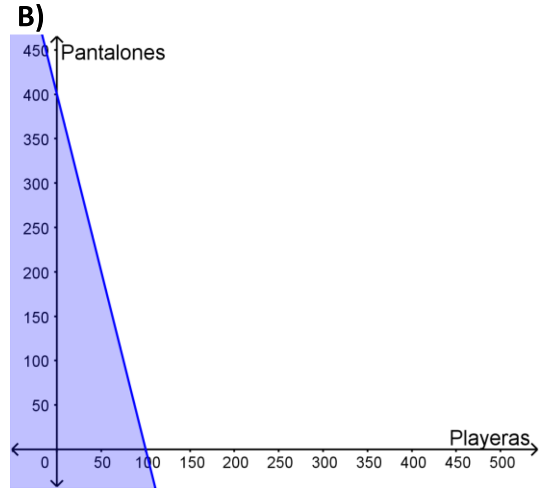
3.4 Si para producir una playera se requieren aproximadamente 250 gramos de algodón y para un pantalón de mezclilla aproximadamente 1000 gramos. ¿Cuál de las siguientes gráficas indica las posibles combinaciones de producción si se disponen de 100 kilogramos de algodón? [Valor 3 puntos]

[

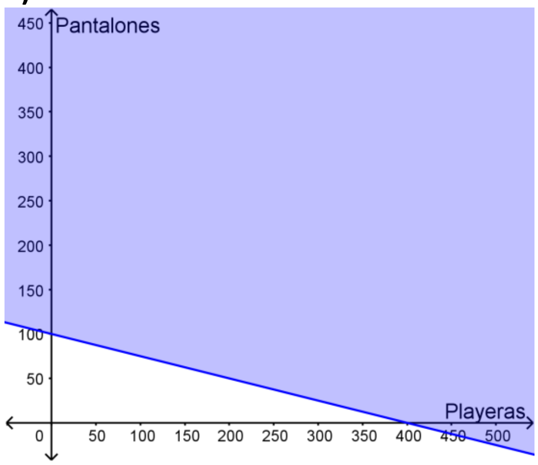
A)



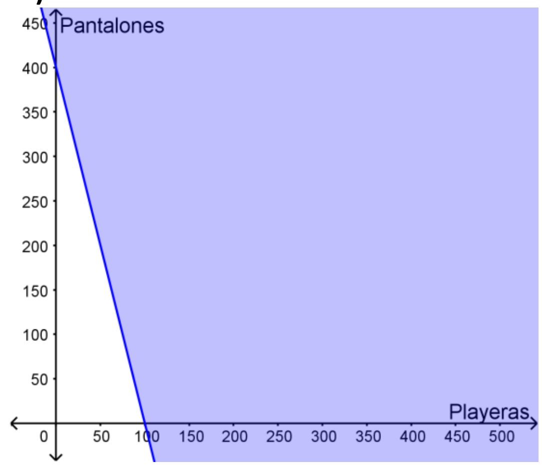
B)



C)



D)



Situación 4. Televisión por cable

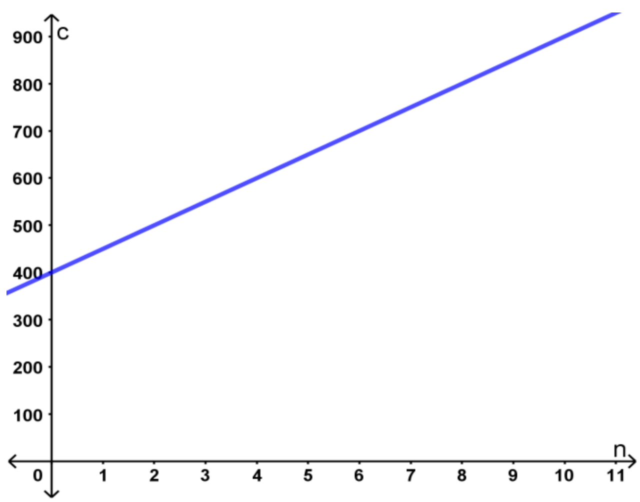
Una persona desea contratar una compañía de televisión por cable, la cual cobra $\$500$ mensuales por el servicio básico y $\$30$ pesos por cada canal Premium que se quiera contratar en forma adicional.

4.1 ¿Cuál de las siguientes expresiones representa esta situación, donde c es el costo total del servicio y n el número de canales Premium adicionales?

[Valor 2 puntos]

A) $n = 530 + c$
B) $c = 500n + 30$
C) $n = 500c + 30c$
D) $c = 30n + 500$

4.2 La siguiente gráfica muestra los precios de una segunda compañía de televisión por cable:



¿Cuál es el precio que una persona pagaría al contratar el servicio básico?
[Valor 1 punto]

A) 400
B) 450
C) 500
D) 550

4.3 ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el cobro que realiza la segunda compañía por el servicio de televisión por cable? [Valor 2 puntos]

A) $n = 350c + 50$
B) $c = 450 + 45n$
C) $n = 500c + 40$
D) $c = 400 + 50n$

4.4 Al analizar gráficamente ambos servicios de televisión, ¿cuál de los siguientes enunciados es verdadero? [Valor 3 puntos]

A) La primera compañía tiene la pendiente mayor.
B) El punto de intersección se da al pagar $\$650$ por un servicio.
C) La segunda compañía tiene la ordenada al origen mayor.
D) El punto de intersección se da al contratar 10 canales Premium.

Situación 5. ¿Cuántas fotos caben en la memoria de un celular?

La siguiente tabla muestra el número de fotos estimadas dependiendo de la resolución de la cámara y el espacio de una tarjeta de celular.

Número de fotos estimadas			
	Resolución de la cámara		
Tarjeta	16MP	20MP	24MP
32 GB	5472	4376	3640
64 GB	10944	8752	7280

Nota: MP son megapíxeles.

5.1 ¿Cuántos megabytes (MB) ocupa una foto de 24 mega pixeles (MP), sabiendo que un gigabyte (GB) es equivalente a 1000 megabytes (MB)?
[Valor 1 punto]

A) 5.85
B) 7.31
C) 8.79
D) 9.21

5.2 María tiene un teléfono de 32 MB. con una resolución de cámara de 24 MP. María tiene en su celular 1274 fotos. ¿Qué porcentaje de la memoria que tiene están ocupando las fotos de su celular? [Valor 2 Puntos]

- **A)** 23%
- **B)** 29%
- **C)** 35%
- **D)** 38%

5.3 Si María quiere ocupar de 4GB a 6GB de su memoria en fotos, ¿Cuál es la desigualdad que representa esta situación? [Valor 2 puntos]

- **A)** $400 \leq 7.31x \leq 600$
- **B)** $400 \leq 8.79x \leq 600$
- **C)** $4000 \leq 7.31x \leq 6000$
- **D)** $4000 \leq 8.79x \leq 6000$

5.4 ¿Cuál es el intervalo que determina el número de fotos en un celular que tiene una resolución de 20 MP, si se desea destinar de 7GB a 9 GB para este fin? [Valor 3 puntos]

- **A)** $[957,1232)$
- **B)** $(957,1232]$
- **C)** $[796,1024)$
- **D)** $(796,1024]$

Examen 2

Situación 1. Estadio Azteca

El Estadio Azteca ubicado en la Ciudad de México, tiene una capacidad para $87\,000$ espectadores, siendo así el más grande de México, el 3° de América y el 11° del mundo.

1.1 En un evento deportivo se vendieron dos tipos de boletos, secciones lateral y cabecera, con un costo de $\$400$ y $\$300$ respectivamente, al llenarse totalmente el estadio el monto recaudado por concepto de entradas fue de $\$32,000,000$. ¿Cuántos boletos de la sección cabecera se vendieron? [Valor 1 punto]

A) $28\,000$

B) $43\,500$

C) $59\,500$

D) $87\,000$

1.2 Un mes antes, en otro evento deportivo, el estadio solo estuvo a la mitad de su capacidad con una recaudación de solo $\$16,000,000$. Si los boletos tuvieron el mismo costo, ¿cuántos boletos de la sección lateral se vendieron? [Valor 2 puntos]

A) $18\,800$

B) $14\,000$

C) $29\,500$

D) $10\,100$

1.3 Para algunos partidos de futbol se agrega una tercera sección, la preferente, con un costo de $\$1,000$ por boleto y que ocupa $10\,000$ lugares del aforo total del estadio. Indica que sistema de ecuaciones representa esta situación al tener una recaudación de $\$38,000,000$ por las entradas: [valor 2 puntos]

A)

$$\begin{cases} 300c + 400l + 1000p = 38\,000\,000 \\ c + l + p = 87\,000 \\ p = 10\,000 \end{cases}$$

B)

$$\begin{cases} 300c + 400l = 38\,000\,000 \\ c + l = 87\,000 \\ p = 10\,000 \end{cases}$$

C)

$$\begin{cases} 300c + 400l + 10\,000p = 38\,000\,000 \\ c + l + p = 87\,000 \end{cases}$$

D)
$$\begin{cases} 300c+400l+10\,000p=38\,000\,000 \\ c+l+p=87\,000 \\ p=1000 \end{cases}$$

1.4 Para un partido de futbol americano se planea que la sección preferente sea una quinta parte de las secciones lateral y cabecera. ¿Cuál de las siguientes expresiones modela esta condición? [Valor 3 puntos]

A) $0.5p=c+l$
B) $5p=c+l$
C) $\frac{1}{5}p=\frac{1}{5}(c+l)$
D) $p=5c+5l$

Situación 2. Distribución de ingresos

El día de hoy, domingo, se te dio para gastar durante toda la semana (de lunes a viernes) $\$700.00$. Como no se te darán más, debes administrarlos y los distribuyes en cantidades iguales para cada día de la semana. Toma en cuenta que en pasajes gastas $\$30.00$ diarios. Ahora bien, el día lunes gastas la mitad de tu gasto diario en comida y en pasajes.

2 1. Si planeas gastar lo mismo en comida todos los días ¿cuánto has gastado en comida cada día? [Valor 2 puntos]

A) $\$40.00$
B) $\$118.00$
C) $\$104.00$
D) $\$54.00$

2 2. Como quieres ir a un concierto el fin de semana, intentarás ahorrar lo más posible, entonces caminas los otros 4 días para ahorrar $\$15.00$ de pasaje diario, y de martes a viernes decides comer en un lugar donde la comida cuesta la cuarta parte de tu gasto diario ¿Cuánto gastaste por día de martes a viernes? [Valor 2 puntos]

A) $\$59.00$
B) $\$50.00$
C) $\$55.00$
D) $\$42.00$

2 3. Si la entrada al concierto es de $\$420.00$ ¿qué fracción de los $\$700.00$ representa este costo? [Valor 1 punto.]

A) $\frac{3}{5}$

B) $\frac{7}{3}$

C) $\frac{2}{5}$

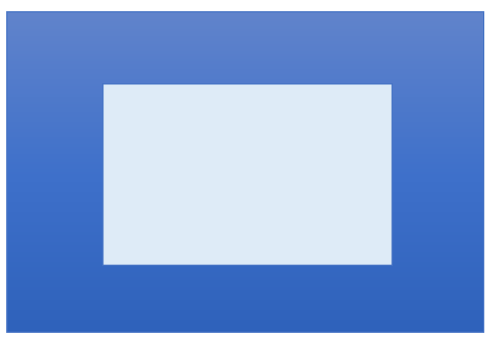
D) $\frac{2}{3}$

2 4. ¿Qué tipo de números crees que se utilizaron en este problema? Valor 1 punto.

A) Enteros positivos
B) Irracionales
C) Enteros negativos
D) Racionales

Situación 3. El mural de la Paz

Antonio es un artista gráfico y fue contratado para pintar un mural de "La Paz" que medirá 20 metros cuadrados en una pared de la colonia Buenavista. La pared sobre la que se pintará el mural mide de ancho 4 metros y de largo 6 metros.



3.1 ¿Cuál es la expresión que representa el largo del mural, si se deja un borde alrededor de este de ancho (x) ?

A) $4-2x$
B) $6-x^2$
C) $4-x^2$
D) $6-2x$

3.2 La expresión algebraica que representa el área del mural es

A) $x^2 - 10x + 24$

B) $x^4 - 10x^2 + 24$

C) $4x^2 - 20x + 4$

D) $4x^2 - 20x + 24$

3.3 La expresión algebraica factorizada que representa el área del mural es

A) $(4 - 2x)(6 - 2x)$

B) $(4 - x)(6 - x)$

C) $(4 - x^2)(6 - x^2)$

D) $2(2 - x)(3 - x)$

3.4 Por problemas vecinales, se cambió el lugar del mural. La nueva pared mide de largo el triple de su ancho. El ancho mide a metros. Se deja un borde de ancho x alrededor del mural, el cual tiene área de 16 metros cuadrados. ¿cuál será la nueva área que tendrá el mural?

A) $-4x^2 + 8ax$

B) $3a^2 - 16$

C) $-4x^2 + 8ax - 16$

D) $4x^2 - 8ax + 3a^2$

Situación 4. Escalas de temperatura

La medida de la temperatura ambiental se realiza, de forma más o menos sistemática, desde los tiempos del Renacimiento. En los siglos sucesivos, se han propuesto varias escalas de medida de temperaturas, basadas principalmente en los puntos de fusión y ebullición del agua como valores de referencia.

Las escalas más utilizadas en la vida cotidiana son la escala Celsius y en los países anglosajones la escala Fahrenheit. Mientras que en el ámbito científico se utiliza predominantemente la escala Kelvin.

Las relaciones que permiten pasar de un valor en escala Celsius a la escala Fahrenheit o Kelvin son las siguientes:

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

$$K = C + 273.15$$

4.1 El alcohol etílico tiene su punto de ebullición a los $351.6K$, ¿a cuántos grados Centígrados equivale esta cantidad? [Valor: 1 punto

- **A)** 624.75
- **B)** 78.45
- **C)** 100.00
- **D)** 177.55

4.2 ¿Cuál de las siguientes relaciones permite pasar de la escala Fahrenheit a la escala Celsius? [Valor 2 puntos]

- **A)** $C=\frac{5}{9}(F+32)$
- **B)** $C=\frac{5}{9}F-32$
- **C)** $C=\frac{5}{9}(F-32)$
- **D)** $C=\frac{5}{9}F+32$

4.3 La siguiente tabla muestra la temperatura promedio de tres ciudades en un día de mayo:

Ciudad de México	$22.5°C$
Berlín, Alemania	$39.2°F$
Sídney, Australia	$297.15K$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? [Valor 2 puntos]

- **A)** La temperatura de Ciudad de México es la mayor de las 3 ciudades.
- **B)** La temperatura de Berlín es mayor que la temperatura de Ciudad de México.
- **C)** La temperatura de Ciudad de México es la menor de las 3 ciudades.
- **D)** La temperatura de la Ciudad de México es menor que la temperatura de Sídney.

4.4 ¿Cuál de las siguientes relaciones permitiría convertir la temperatura de la escala Kelvin a la escala Fahrenheit directamente? [Valor 3 puntos]

- **A)** $F=\frac{9}{5}K-523.67$
- **B)** $F=\frac{9}{5}K-459.67$
- **C)** $F=-\frac{9}{5}K+523.67$
- **D)** $F=-\frac{9}{5}K+459.67$

Situación 5. La organización de una fiesta de graduación

Un grupo de alumnos ha alquilado un espacio para organizar una fiesta y recolectar dinero para su graduación. Se estima que en el espacio alquilado caben 200 personas y su renta es de $12000.

5.1 Obtén el costo mínimo del boleto si se desea que al menos se ganen $30 pesos por persona y supón un lleno total. [Valor 1 punto]

- **A)** $30.00
- **B)** $57.00
- **C)** $60.00
- **D)** $90.00

5.2 Los alumnos al estar vendiendo boletos suponen que el espacio se llenará a un 60% de su capacidad. En este caso ¿cuál es el costo mínimo del boleto si requieren tener una ganancia mínima de $7500? [Valor 2 puntos]

- **A)** $37.50
- **B)** $56.25
- **C)** $162.50
- **D)** $243.75

5.3 Los alumnos al estar organizando la fiesta habían omitido que tienen que mandar a hacer boletos para cada persona y además incluir el sonido que les cobra $8500. La imprenta que les cotizó la impresión de los boletos les cobra $400 por una impresión de 100 boletos. Bajo estas condiciones ¿cuál sería el costo mínimo del boleto si piensan que pueden llenar toda la capacidad del lugar y siguen en pie que su ganancia mínima debe de ser de $30 pesos por persona? [Valor 2 puntos]

- **A)** $109.50
- **B)** $134.50
- **C)** $136.50
- **D)** $154.50

5.4 Los alumnos al no cotizar bien sus costos vendieron 80 lugares a 200 pesos cada uno, el cual incluye bebida libre. Al estimar el costo de la bebida observaron que es de $30 pesos por persona. Al negociar con el lugar les ofrece la renta con sonido y boletos incluidos por $20000, ¿Cuántos boletos de $200 pesos como mínimo deben todavía vender para al menos ganar 20 pesos por persona? Nota: Considera que no se pueden vender más de 200 entradas y ya no pagas impresión de ningún boleto porque te los da el lugar. [Valor 3 puntos]

- **A)** 45
- **B)** 54
- **C)** 126
- **D)** 173

Respuestas a los exámenes tipo extraordinario

c							
1.1 A)	1.2 C)	1.3 D)	1.4 B)	2.1 A)	2.2 C)	2.3 D)	2.4D)
3.1 A)	3.2 D)	3.3 B)	3.4 A)	4.1 D)	4.2 A)	4.3 D)	4.4 B)
5.1 C)	5.2 C)	5.3 D)	5.4 A)				

c							
1.1 A)	1.2 C)	1.3 A)	1.4 B)	2.1 A)	2.2 B)	2.3A)	2.4D)
3.1 D)	3.2 D)	3.3 A)	3.4 B)	4.1 B)	4.2 C)	4.3 D)	4.4 B)
5.1 D)	5.2 C)	5.3 C)	5.4 B)				

NOTAS